

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук (ИПУ РАН)

К 80-летию ИПУ РАН

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)

Рекомендовано
федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по укрупненным группам
специальностей и направлений подготовки
27.00.00 «Управление в технических системах»
в качестве учебного пособия при реализации основных
профессиональных образовательных программ
подготовки магистров по укрупненной группе направлений
подготовки 27.04.00 «Управление в технических системах»

Под редакцией
члена-корреспондента РАН
Д. А. Новикова



URSS

МОСКВА

Авторский коллектив:

Б. Р. Андриевский, М. В. Балашов, Н. Н. Бахтадзе, А. А. Галяев, В. М. Глузов, М. В. Губко, Ю. П. Емельянова, Н. Н. Карабутов, Н. А. Коргин, Ю. И. Кудинов, А. Г. Кушнер, В. А. Лотоцкий, А. В. Макаренко, А. С. Матвеев, Д. А. Новиков, П. В. Пакшин, Ф. Ф. Пашенко, Л. А. Петросян, Е. Я. Рубинович, А. А. Тремба, П. Ю. Чеботарев, В. Н. Честнов, И. Б. Ядыкин

Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие / Под ред. Д. А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 552 с.

Учебное пособие представляет собой «навигатор» по таким направлениям математической теории управления, как:

- ✓ неопределенность в системах управления (стохастические и адаптивные системы, идентификация, управление с итеративным обучением);
- ✓ оптимизация (в задачах большой размерности; распределенная, невыпуклая) и управление;
- ✓ системы с распределенными параметрами, многоагентные и сетевые системы управления;
- ✓ интеллектуальное управление (системы с переключениями, нечеткие системы, искусственные нейронные сети);
- ✓ стратегическое поведение в системах управления, описываемое аппаратом дифференциальных, кооперативных, иерархических или рефлексивных игр.

Целью учебного пособия является расширить кругозор студентам магистратуры и аспирантам математических и технических специальностей (в том числе по укрупненной группе направлений подготовки 27.04.00 «Управление в технических системах» и по направлению подготовки 27.06.01 «Управление в технических системах»), уже освоившим теорию автоматического управления по классическим учебникам, то есть дать им общее представление о многообразии задач и направлений современной теории управления. Книга также будет полезна научным и инженерно-техническим работникам.

Рецензенты:

директор Института системного анализа ФИЦ ИУ РАН,
академик РАН, д-р техн. наук, проф. *Ю. С. Попков*;
главный научный сотрудник Института проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН, д-р техн. наук *Б. Т. Поляк*

Технический редактор: канд. техн. наук *Я. И. Квинто*

ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 34,5. Зак. № .

ISBN 978–5–9710–6644–6

© Коллектив авторов, 2019

© ИПУ РАН, 2019

© ЛЕНАНД, оформление, 2019

25997 ID 250722



9 785971 066446

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	11
В.1. Классификации систем управления.....	11
В.2. Кибернетика	46
Глава 1. Неопределенность.....	80
1.1 Стохастические системы	80
1.2. Системы адаптивного управления.....	108
1.3. Идентификация систем управления	138
1.4. Управление с итеративным обучением.....	178
Глава 2. Оптимизация	203
2.1. Оптимизация систем большой размерности.....	203
2.2. Распределенная оптимизация.....	230
2.3. Невыпуклая оптимизация.....	259
Глава 3. Распределенность и сети	281
3.1. Системы с распределенными параметрами	281
3.2. Сетевые многоагентные системы	303
3.3. Сетевые системы управления.....	323
Глава 4. Интеллектуальное управление	359
4.В. Введение	359
4.1. Системы с переключениями.....	368
4.2. Нечеткие системы управления.....	400
4.3. Искусственные нейронные сети	426
Глава 5. Стратегическое поведение.....	456
5.В. Введение	456
5.1. Дифференциальные игры	463
5.2. Кооперативные игры.....	482
5.3. Иерархические и рефлексивные игры.....	510

ПРЕДИСЛОВИЕ

Название настоящей книги – «Теория управления (дополнительные главы)» – неизбежно вызывает вопрос: главы, дополнительные к чему? Если к «классической теории управления», то где ее границы? Попробуем ответить на этот вопрос конструктивно, описав структуру классической теории управления, и обсудим современное ее учебно-методическое обеспечение.

Управление – воздействие на *управляемую систему* с целью обеспечения требуемого ее поведения [15]. *Система управления* (СУ) включает в себя три составные части: *управляемую систему*, *управляющую систему* и *связи* между ними.

Исследование и разработка любой системы управления требуют решения как минимум двух основных задач – анализа и синтеза.

Анализ – исследование управляемой системы (ее динамики, чувствительности по параметрам, начальным и внешним условиям и др.), а также таких свойств СУ, как (см. подробное описание, например, в [18]):

– *управляемость* (возможность, используя допустимые управляющие воздействия, перевести за конечное время управляемую систему из заданного начального состояния в требуемое конечное состояние);

– *наблюдаемость* (возможность однозначно определить состояние управляемой системы, имея информацию о ее выходе и об управляющих воздействиях);

– *устойчивость* (способность системы возвращаться к состоянию равновесия после прекращения воздействия, нарушившего это равновесие);

– *робастность* (работоспособность закона управления при наличии возмущений; в общем случае – сохранение системой требуемых свойств при любых допустимых значениях неопределенных параметров).

Синтез – построение закона/алгоритма управления, обеспечивающего требуемые свойства СУ и поведение управляемой системы.

Взяв за основу приведенную ниже систему классификаций задач управления (см. основания классификации №№ 1–17 в разделе В.1), определим, что мы понимаем под классической теорией управления (соответствующие ключевые термины вводятся ниже).

Классическая теория управления – раздел теории управления, изучающий задачи анализа и синтеза централизованного автоматического управления одним объектом.

Кратко рассмотрим учебно-методическое обеспечение высшего образования в области теории управления.

Отметим, что попадающие в учебник или справочник научные результаты проходят длительный отбор: путь от находящейся на острие развития науки первой публикации в виде статьи или доклада на профильной конференции до попадания в учебник занимает в среднем 10-15 лет.

Бурный рост классической теории управления в 50–70-е годы XX века (см. анализ истории теории управления в [18, 27, 33]) привел к появлению в конце 60-х – середине 80-х годов целого ряда замечательных учебников по *теории автоматического управления* (ТАУ). Среди них ставшие хрестоматийными справочник [22] и учебники [2, 4, 6, 17, 20, 23, 24, 25]. Многочисленные примеры систем автоматического управления можно найти в [4, 7, 16, 17, 19, 25, 30, 35]. Задачи, примеры и упражнения, в том числе в MATLAB, содержатся в [1, 7, 11, 12, 21, 30].

«Типовая» структура учебника по ТАУ примерно следующая:

1. История ТАУ и примеры систем автоматического управления.

2. Линейные системы: операторные и частотные методы; непрерывные и дискретные системы: устойчивость, стабилизация, управляемость, наблюдаемость; неопределенность; синтез; оценивание, робастность.

3. Нелинейные системы; непрерывные и дискретные системы: устойчивость, стабилизация, управляемость, наблюдаемость, неопределенность; синтез.

4. Оптимальное управление.

В некоторых учебниках дополнительно к перечисленным четырем пунктам рассматриваются стохастические системы, идентификация и адаптивные системы автоматического управления.

Более поздние (90-е годы XX – начало XXI века) справочники ([14] и первый том [37]) и учебники [1, 3, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 26, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 38] за редкими исключениями ограничиваются той же структурой.

Современное учебное пособие по математической ТАУ [18] также следует «типовой» структуре: в нем рассматриваются непрерывные и дискретные линейные системы (включая задачи оценивания и робастного управления), возмущения (ограниченные и случайные), неопределенность в описании ОУ и начальных условий; нелинейные системы, а также элементы теории оптимального управления. Оно содержит математический аппарат, адекватный современной ТАУ – системы в пространстве состояний, технику линейных матричных неравенств, нелинейные системы, робастность, оптимальность.

Вышеупомянутые исключения немногочисленны – энциклопедия [31], третий том [37], пятый том [14] и [29]. В частности, в третьем томе [37] рассматриваются некоторые современные направления: проблемы идентификации, адаптивные, многомерные, гибридные, стохастические системы, системы с распределенными параметрами, сетевые системы, а также нечеткие и нейросетевые системы. В [29] значительное внимание уделяется моделям и методам искусственного интеллекта в задачах управления: логический вывод, генетические алгоритмы, нечеткие системы, нейросетевое управление, экспертные системы; а также элементам исследования операций в управлении.

Другими словами, современные учебники и справочники достаточно полно охватывают классическую теорию управления, но практически не затрагивают других постановок задач управления и почти не рассматривают интеллектуальное управление, децентрализованное/распределенное управление, сетевое управление и управление многоагентными и киберфизическими системами, управление с учетом современных технологических тенденций и возможностей машинного обуче-

ния, стратегическое поведение субъектов управляемых систем и т.д.

Настоящая книга является попыткой восполнить этот пробел в учебно-методическом обеспечении преподавания математической теории управления в вузах и в аспирантуре. Ее целью является расширить кругозор студентам магистратуры и аспирантам математических и технических специальностей, уже освоившим ТАУ по классическим учебникам (например, [10, 17]) в бакалавриате, а затем – в объеме учебного пособия [18] – в магистратуре, то есть дать им общее представление о многообразии задач и направлений современной теории управления.

Был выбран стиль изложения в виде набора автономных (в том числе с отдельными списками литературы) разделов, написанных ведущими специалистами в соответствующей области¹. Необходимо подчеркнуть, что каждая из затронутых тем чрезвычайно обширна (тысячи, а то и десятки тысяч статей; десятки и сотни монографий), поэтому изложение и «обзоры», включающие ссылки на основные пионерские статьи и классические монографии, ни в коей мере не претендуют на полноту представления детальной профессиональной картины.

Литература

- 1 АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Избранные главы теории автоматического управления*. – СПб: Наука, 2000. – 475 с.
- 2 АНДРЮЩЕНКО В.А. *Теория систем автоматического управления*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. – 256 с.
- 3 АФАНАСЬЕВ В.Н., КОЛМАНОВСКИЙ В.Б., НОСОВ В.Р. *Математическая теория конструирования систем управления*. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.

¹ Большинство авторов являются сотрудниками Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. Также представлены: МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, МФТИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, МИРЭА, ИПМАШ РАН, АПИ НГТУ, ЛГТУ и др.

- 4 БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П. *Теория систем автоматического управления*. – М.: Физматлит, 1975. – 768 с.
- 5 БОСС В. *Лекции по теории управления*. – М.: Либроком. Том 1. Автоматическое регулирование, 2012. – 216 с. Том 2. Оптимальное управление, 2014. – 208 с.
- 6 ВОРОНОВ А.А. *Управляемость, наблюдаемость, устойчивость*. – М.: Наука, 1979. – 339 с.
- 7 ГУДВИН Г.К., ГРЕБЕ С.Ф., САЛЬГАДО М.Э. *Проектирование систем управления*. – М.: Бином, 2004. – 911 с.
- 8 ДЕМЕНКОВ Н.П., МИКРИН Е.А. *Управление в технических системах*. – М.: МГТУ им. Баумана, 2017. – 453 с.
- 9 ЕГОРОВ А.И. *Основы теории управления*. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
- 10 КИМ Д.П. *Теория автоматического управления*. – М.: Физматлит, 2007. Том 1: Линейные системы. – 310 с. Том 2: Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – 440 с.
- 11 КИМ Д.П., ДМИТРИЕВА Л.П. *Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы*. – М.: Физматлит, 2007. – 168 с.
- 12 КИМ Д.П. *Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы*. – М.: Физматлит, 2008. – 328 с.
- 13 ЛЕОНОВ Г.А. *Теория управления*. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. – 233 с.
- 14 *Методы классической и современной теории автоматического управления* : Учебник в пяти томах / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
- 15 НОВИКОВ Д.А. *Методология управления*. – М.: Либроком, 2011. – 128 с.
- 16 ПАНТЕЛЕЕВ А.В., БОРТАКОВСКИЙ А.С. *Теория управления в примерах и задачах*. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
- 17 ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. *Курс теории автоматического управления*. – М.: Наука, 1986. – 616 с.

- 18 ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие.* – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
- 19 ПОЛЯКОВ К.Ю. *Основы теории автоматического управления.* – СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2012. – 234 с.
- 20 РОЙТЕНБЕРГ Я.Н. *Автоматическое управление.* – М.: Наука, 1971. – 396 с.
- 21 *Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления* / Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
- 22 *Справочник по теории автоматического управления* / Красовский А.А. (ред.). – М.: Наука, 1987. – 712 с.
- 23 СЮ Д., МЕЙЕР А. *Современная теория управления и ее применение.* – М.: Машиностроение, 1972. – 544 с.
- 24 *Теория автоматического управления.* В двух частях / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. Ч. 1. – 362 с. Ч. 2. – 382 с.
- 25 ТУ Ю. *Современная теория управления.* – М.: Машиностроение, 1971. – 472 с.
- 26 ALBERTOS P., MAREELS I. *Feedback and Control for Everyone.* – Berlin: Springer, 2010. – 318 p.
- 27 ASTROM K., KUMAR P. *Control: a Perspective // Automatica.* – 2014. – No. 50. – P. 3–43.
- 28 ASTROM K., MURRAY R. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers.* – Princeton: Princeton University Press, 2012. – 408 p.
- 29 BUBNICKI Z. *Modern Control Theory.* – Berlin: Springer, 2005. – 423 p.
- 30 DORF R., BISHOP R. *Modern Control Systems.* – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011. – 1111 p. (Рус.: ДОРФ Р., БИШОП Р. *Современные системы управления.* – М.: Бином, Лаборатория базовых знаний, 2004. – 832 с.)
- 31 *Encyclopedia of Systems and Control* / Ed. by J. Baillieul, T. Samad. – London, Springer, 2015. – 1554 p.
- 32 GLAD T., LJUNG L. *Control Theory: Multivariable and Non-linear Methods.* – London: Taylor & Francis, 2000. – 467 p.
- 33 *Historic Control Textbook* / Ed. by J. Gertler. – Oxford: Elsevier, 2006. – 304 p.

- 34 KHALIL H. *Nonlinear Systems*. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. – 750 p.
- 35 OGATA K. *Modern Control Engineering*. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010. – 905 p.
- 36 SONTAG E. *Mathematical Control Theory*. – Berlin: Springer, 1998. – 531 p.
- 37 *The Control Handbook* / Ed. by W. Levine. – New York: CRC Press, 2010. Vol. I – III. – 3526 p.
- 38 WILLEMS J., POLDERMAN J. *Introduction to Mathematical Systems Theory*. – Heidelberg: Springer, 1998. – 434 p.

ВВЕДЕНИЕ

Первый раздел введения посвящен *классификациям систем управления* и описанию *структуры изложения* материала настоящей книги.

Второй раздел содержит краткое изложение истории и современного состояния *кибернетики* (науки об общих закономерностях процессов управления и передачи информации в различных системах, будь то машины, живые организмы или общество), обсуждение перспектив ее развития.

В.1. КЛАССИФИКАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Новиков Д.А.¹

Системы управления можно классифицировать по различным почти независимым основаниям (то есть конкретная система управления определяется совокупностью значений признаков классификации по всем основаниям).

1. Первым основанием классификации систем управления является *тип управления*, определяемый степенью автоматизации функций управления. В зависимости от того, включают ли элементы системы управления человека (всегда являющегося *субъектом*), получаем следующие три (из четырех логически возможных²) комбинации – типы управления, приведенные в таблице В.1.1 [2]. В управляемую систему могут входить технические, природные, биологические, социальные и другие компоненты (см. рис. В.1.8 ниже).

¹ *Дмитрий Александрович Новиков, Институт проблем управления им В.А. Трапезникова РАН; чл.-корр. РАН (novikov@ipu.ru).*

² *Четвертый тип – объект-субъектный (когда регулятор «управляет» человеком) – тоже встречается, но рассматривать его отдельно мы не будем (примеры: тренажер, когда управляющее устройство направляет деятельность обучаемого; кардиостимулятор; светофор, регулирующий поведение водителей на перекрестке, и т.п.).*

Таблица В.1.1. Типы управления

Тип управления	Управляющая система	Управляемая система
Автоматическое управление (объект-объектное)	Управляющее устройство, регулятор	Объект управления
Автоматизированное управление (субъект-объектное)	Управляющий субъект	Объект управления
Организационное управление (субъект-субъектное)	Управляющий субъект	Управляемый субъект

Автоматическое управление соответствует случаю, когда и управляющая, и управляемая системы являются техническими или кибернетическими объектами. Раздел теории управления, исследующий задачи автоматического управления, называется *теорией автоматического управления* (ТАУ).

Автоматизированное управление соответствует случаю, когда управляющая система является субъектом – например, человеко-машинной системой, в которой наиболее важные и ответственные решения принимает человек. Управляемая система при этом является техническим или кибернетическим объектом¹.

Организационное управление соответствует случаю, когда и управляющая, и управляемая системы являются субъектами, то есть когда люди управляют людьми.

¹ *Автоматизированная система управления, как правило, включает и «автоматические» и «человеческие» компоненты. Например, в управлении технологическими процессами информация о состоянии объекта управления может собираться и обрабатываться в автоматическом режиме. На основании этой информации человек-оператор принимает решение (быть может, используя автоматически генерируемую системой поддержки принятия решений «советующую» информацию). Затем принятое решение доводится до объекта управления «автоматически». Если человек управляет объектом без средств автоматизации, то такое управление называется ручным (пример – езда на велосипеде).*

Рассмотрим *систему автоматического управления* (САУ) [27], представленную на рис. В.1.1 (пунктирными линиями обозначены сущности, которые в зависимости от конкретной рассматриваемой модели могут присутствовать или отсутствовать) и включающую *объект управления* (ОУ) и *управляющее устройство* (УУ, регулятор).

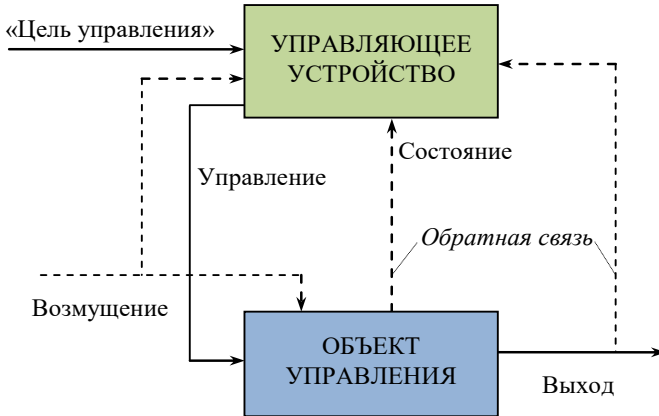


Рис. В.1.1. Базовая структура системы автоматического управления

Объект управления характеризуется своим *состоянием* и *выходом* (в отличие от состояния, выход ОУ всегда считается полностью известным). Состояние и выход ОУ могут изменяться во времени¹ и зависеть от управления (*управляющего воздействия*), *цели управления* (например, минимизация отклонения от *задающего воздействия*) и *возмущений*, отражающих влияние *внешней среды*. Эта зависимость называется *моделью ОУ*

¹ Теория управления имеет дело, как правило, с динамическими системами. Однако встречаются и ситуации (например, в организационном управлении [21]), когда рассматриваются только два состояния управляемой системы – начальное и конечное, то есть управляющее воздействие применяется «однократно». Ряд задач оптимизации и исследования операций также может трактоваться как подобное управление «в статике».

(МОУ). В рамках базовой структуры САУ модель ОУ используется на этапах решения задач анализа и синтеза САУ для выбора/настройки законов управления, параметров регулятора и т.д. – см. [27].

Если состояние ОУ не полностью измеряется, то используют САУ с наблюдателем (*наблюдателем* называется алгоритмический блок, предназначенный для *оценивания* переменных состояния ОУ или внешней среды). На рис. В.1.2 приведена структура САУ с наблюдателем, который в рамках некоторых модели ОУ и модели возмущений на основании известного выхода выдает оценку состояния ОУ.

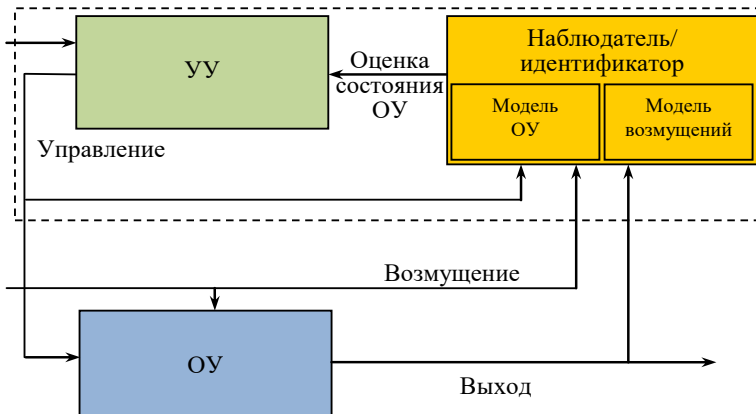


Рис. В.1.2. Структура САУ с наблюдателем/идентификатором

«Расширенное управляющее устройство» (в рассматриваемом случае включающее регулятор и наблюдатель) обозначено на рис. В.1.2 (и рисунках ниже) пунктирным прямоугольником.

Здесь уместно сделать небольшое отступление и обсудить различия и связи реальной СУ и ее модели¹ – см. рис. В.1.3 (вертикальная пунктирная линия условно обозначает границу между реальным миром и «миром моделей», то есть между реальной СУ и ее *цифровым двойником*).

¹ Модель – аналог определенного фрагмента природной или социальной реальности, «заместитель» оригинала в познании и практике.

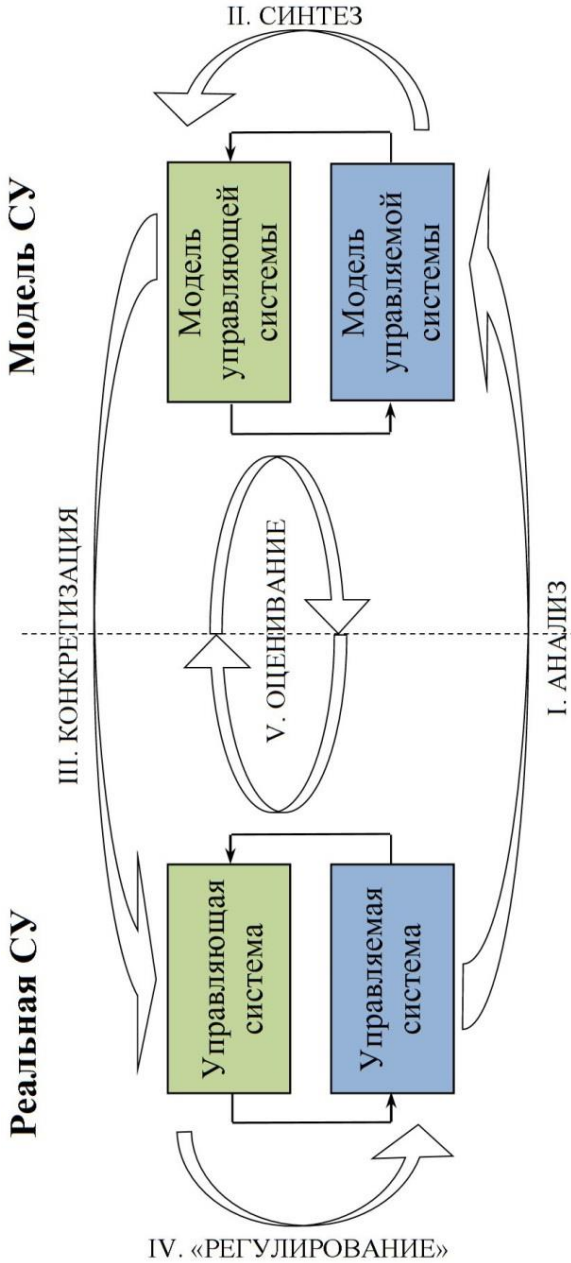


Рис. В.1.3. Структура деятельности по созданию СУ: реальная СУ и ее модель

Пусть задачей является разработка и создание некоторой реальной СУ, включающей управляющую и управляемую системы.

Соответствующая *деятельность* имеет следующую структуру (см. [2] и рис. В.2.7 ниже).

Сначала осуществляется *анализ* (I) – строится модель управляемой системы и проводится исследование управляемой системы и ее модели (ее динамики, чувствительности по параметрам, начальным и внешним условиям и др.), а также соответствующих свойств СУ (см. предисловие).

Затем осуществляется *синтез* (II) – построение закона/алгоритма управления, обеспечивающего требуемые свойства СУ и поведение управляемой системы. Отметим, что этот этап осуществляется в «мире моделей».

Результаты синтеза в процессе *конкретизации* (III) реализуются в реальной управляющей системе, которая осуществляет «*регулирование*» (IV) реальной управляемой системой.

Оценивание (V) позволяет осуществить *идентификацию* модели, сопоставить результаты деятельности ее целям, внести при необходимости *коррективы* (при несоответствии ожидаемого и наблюдаемого поведения управляемой системы) и перейти к следующему циклу.

Отметим, что, во-первых, приведенная на рис. В.1.3 структура деятельности по созданию СУ универсальна для автоматического, автоматизированного и организационного управления.

Во-вторых, модель объекта управления может содержаться и в реальной СУ – см. рис. В.1.4 и рис. В.1.6 ниже. «Рефлексивное» соответствие между реальной СУ и ее моделью (включающей «модель модели») будет иметь тот же вид, что и в случае рис. В.1.3.

2. Целью управления является обеспечение либо заданного значения (определяемого *задающим воздействием, уставкой*) выхода ОУ – задача *стабилизации* (в этом случае управление иногда называется *регулированием*); либо заданной (или максимально близкой к требуемой) его динамики – задача *слежения*; либо экстремизация некоторого критерия качества – задача *оптимизации*. Конечно, стабилизация является частным случаем слежения, а слежение – частным случаем оптимизации.

Если одновременно используются несколько критериев качества, то говорят о *многокритериальном управлении*.

3. Важным основанием классификации является то, используется ли для выработки управляющих воздействий *обратная связь* (информация о состоянии и/или выходе ОУ – см. рис. В.1.1). При наличии обратной связи СУ называются *замкнутыми* (в этом случае говорят о следующих видах управления: *управление по состоянию/выходу, управление по отклонению, управление с обратной связью, позиционное управление*). Обратные связи могут иметь сложную структуру [9]. СУ без обратной связи называются *разомкнутыми*.

В зависимости от числа обратных связей (при одном ОУ) различают *одноконтурные* и *многоконтурные* системы.

Разомкнутые системы, в свою очередь, подразделяются на имеющие следующие виды управления:

– *программное управление* (управляющее воздействие является функцией только времени);

– *управление по возмущению* (управляющее воздействие зависит от возмущения).

Комбинированные системы управления являются «смешанными», например, в них управляющее воздействие может зависеть и от возмущения, и от выхода.

4. Модель объекта управления может быть линейной (*линейные системы*) или нелинейной (*нелинейные системы*). При использовании методов прямого синтеза (см. раздел 1.3) модели может вообще не быть.

В случае когда характеристики объекта управления и/или внешней среды известны не полностью, для построения их адекватной модели на основе анализа данных входных и выходных сигналов, то есть идентификации/оценки (и, соответственно, оценки состояния ОУ и возмущений), используются САУ с *идентификатором* – см. рис. В.1.2.

5. Модель объекта управления может рассматриваться в непрерывном времени (*непрерывные системы*) или в дискретном времени (*дискретные системы*¹). Общепринятым аппаратом

¹ В общем случае дискретными называют системы, в которых имеется квантование по уровню сигнала или/и время дискретно. В случае

описания модели ОУ являются соответственно дифференциальные и разностные уравнения.

Часть переменных вектора состояния/выхода может меняться непрерывно, часть – изменяться дискретно (например, в *логико-динамических системах* – см., например, [6, 23]).

6. Если имеет место изменение свойств (характеристик/структуры/параметров) ОУ во времени, то говорят, что он *нестационарный*; в противном случае ОУ называют *стационарным*.

7. В зависимости от размерности входа и выхода ОУ различают *одномерные* (SISO – Single Input Single Output) и *многомерные системы* (MIMO – Multiple Input Multiple Output или SIMO – Single Input Multiple Output, или MISO – Multiple Input Single Output).

8. Возмущения могут отсутствовать или присутствовать (не действовать, действовать). В последнем случае они могут быть *известными* или *неизвестными*. В случае неизвестных возмущений, в зависимости от имеющейся о них информации, они могут быть *ограниченными* или *случайными*.

9. Неопределенность может отсутствовать (*детерминированные системы*) или присутствовать (*системы с неопределенностью* – см. главу 1).

В последнем случае неопределенность может иметь место относительно возмущений, модели объекта управления (включая, быть может, его начальное состояние), выхода или их комбинаций.

Неопределенность модели ОУ может иметь место относительно ее структуры (*структурная неопределенность*) или параметров (*параметрическая неопределенность*). Параметрическая неопределенность ОУ может быть *феноменологической*, проистекающей из законов природы (Phenomenological Data) и *обусловленной данными* (Data Driven) – например, в идентификации.

В зависимости от информации, имеющейся о неопределенных факторах, различают *интервальную неопределенность*

двух возможных состояний одного из элементов системы управления говорят о релейных системах.

(известно только множество их возможных значений), *вероятностную неопределенность* (известно распределение вероятностей) и *нечеткую неопределенность* (известна функция принадлежности).

10. В зависимости от числа ОУ различают *одноэлементные ОУ* и *многоэлементные ОУ*.

Если управляемых элементов несколько и они взаимодействуют между собой, то говорят о *групповом управлении*.

Если различные элементы или подсистемы многоэлементной системы имеют существенно отличающиеся характерные времена или/и линейные размеры, то говорят о *разномасштабных системах*.

11. По способности к адаптации (возможности приспособления к изменяющимся внешним условиям) различают *неадаптивные* и *адаптивные системы* (см. раздел 1.2). Среди последних выделяют самонастраивающиеся, экстремальные, самоорганизующиеся.

Изменяться могут: структура, характеристики/параметры как объекта управления, так и внешней среды («возмущений»). Эти изменения требуют соответствующих изменений характеристик/параметров управляющего устройства, за что в *адаптивном управлении* отвечает блок *адаптации* – см. рис. В.1.4.

Отметим, что на рис. В.1.4 (ср. с рис. В.1.2) модель объекта управления вынесена в самостоятельный блок (который может включать в себя и оптимизационную часть). Системы управления, существенно использующие модели ОУ и внешней среды, называются *системами, основанными на моделях* (Model-Based Control). Блоки идентификации и адаптации могут иметь сложную внутреннюю структуру и использовать самые разные подходы и методы – экстремизационные, статистические и др. (см. главу 1).

12. В зависимости от распределенности объекта управления (одного) в пространстве различают *системы с сосредоточенными параметрами* и *системы с распределенными параметрами*. В моделях последних обычно используются уравнения в частных производных (см. раздел 3.1).

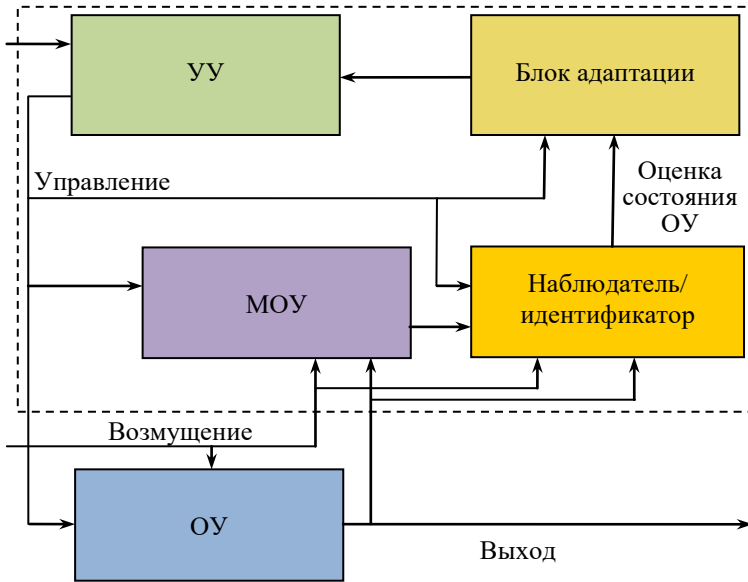


Рис. В.1.4. Структура адаптивной САУ с наблюдателем/идентификатором

13. В случае многоэлементных систем различают базовую структуру ОУ (один ОУ), сетевую, иерархическую и смешанную структуру ОУ (см. главу 3).

14. В зависимости от числа управляющих систем различают системы с одной и несколькими управляющими системами.

15. В зависимости от структуры СУ выделяют четыре типа структуры СУ (см. рис. В.1.11), приведенные в таблице В.1.2.

Кроме того, следует различать двухуровневые (примерами являются СУ, приведенные на рис. В.1.1, В.1.2 и В.1.4) и многоуровневые СУ [17]. Пример многоуровневой СУ приведен на рис. В.1.5 (см. также рис. В.1.9).

Многоуровневые СУ также могут характеризоваться разномасштабностью (как пространственной, так и временной).

16. Связи между управляющей системой и ОУ могут иметь базовый вид (см. рис. В.1.1) или осуществляться через информационно-телекоммуникационную сеть. В последнем случае говорят о сетевом управлении (см. рис. В.1.12 и раздел 3.3).

Таблица В.1.2. Типы структур СУ

Число управляющих систем	Одна	Несколько
Число ОУ		
Один	Базовая	Децентрализованная (Decentralized)
Несколько	Веерная	Распределенная (Distributed)

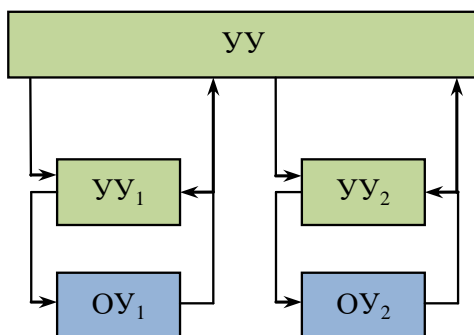


Рис. В.1.5. Пример многоуровневой СУ

17. В зависимости от «регулярности» вмешательства управляющей системы в функционирование ОУ разделяют *неавтономные системы* и *автономные системы*. В последних управление заключается в начальной «настройке» параметров, свойств и характеристик управляемой системы, которая затем функционирует «самостоятельно», в отсутствие управляющих воздействий.

18. Важным основанием классификации СУ является использование знаний ими. Системы управления, *основанные на знаниях* (Knowledge-Based Control) – см. рис. В.1.6 (ср. с рис. В.1.2 и рис. В.1.4), включают «блок знаний», который может иметь сложную внутреннюю структуру: включать блоки хранения знаний, вывода, модификации/актуализации знаний и т.д. Более общей категорией являются *интеллектуальные системы управления* (ИСУ) – см. определения и обсуждение в главе 4.

Причинами появления и использования ИСУ могут являться: сильная нелинейность ОУ, отсутствие модели ОУ или модели внешней среды, существенность слабоформализованного опыта человека-оператора и др.

Важным для анализа ИСУ может являться использование результатов *анализа данных* о функционировании системы. Наиболее проработанным подходом к использованию этой информации является применение *параметрических* и *непараметрических методов идентификации*, а также методов *структурной идентификации*. Однако использование традиционных методов может быть проблематичным, поскольку реализация идентификационного синтеза характеризуется определенными трудностями. Прежде всего, при совмещении управления и оценивания управляемый процесс – нестационарный с зависимыми значениями, поэтому требование состоятельности оценок ограничивает класс стратегий управления. Помимо этих трудностей для широкого класса объектов (например, многомерных многосвязных систем) построение классических идентификационных моделей практически невозможно. Альтернативой могут служить методы адаптации, развиваемые начиная с [4] и использующие *индуктивные знания*, получаемые в результате анализа данных.

Ключевые категории, характеризующие ИСУ:

- *экспертные системы* (использующие классический логический вывод или иные правила вывода);
- *нечеткая логика*;
- *искусственные нейронные (ИНС), иммунные, байесовы и др. сети*;
- *генетические алгоритмы* (ГА – класс эвристических методов локальной оптимизации) и *эволюционные вычисления*;
- *мягкие вычисления*;
- *когнитивные карты*.

Обзоры и классификации ИСУ можно найти в [5, 6, 11, 44].
Общая структура ИСУ приведена на рис. В.1.6.

Отметим, что на рис. В.1.6 приведена «максимальная» структура, редко встречающаяся в теории и на практике. Обычно ограничиваются следующими вариантами (отмеченными

на рис. В.1.6 римскими цифрами) или их комбинациями (порождающими соответствующие классы ИСУ):

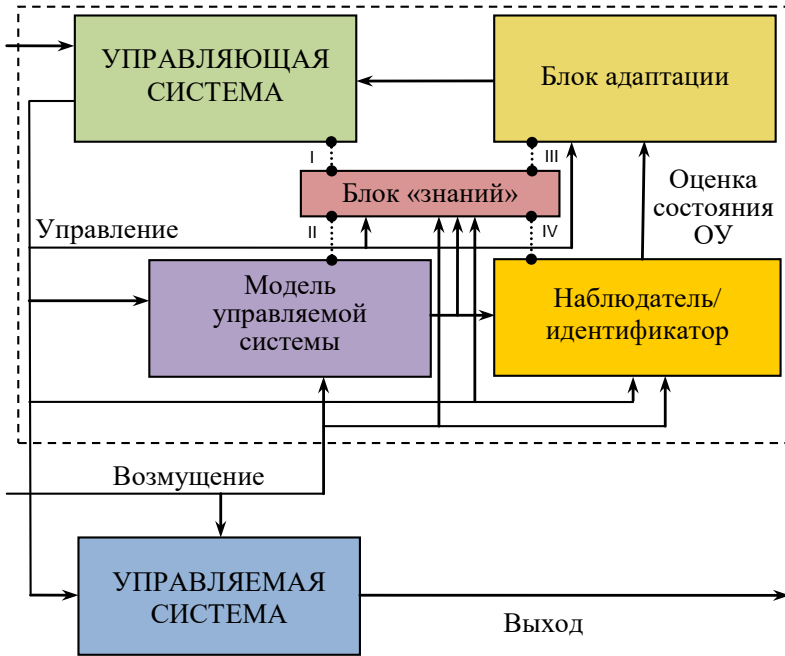


Рис. В.1.6. Структура интеллектуальной СУ

I. Знания используются в управляющем устройстве. Пример – *нечеткий регулятор* (см. раздел 4.2), или *нейросетевой регулятор* (см. раздел 4.3).

II. Знания используются в модели ОУ. Примером являются *глубокие нейронные сети* как модель ОУ (см. раздел 4.3).

III. Знания используются в процессе адаптации. Пример – *системы с переключениями* (см. раздел 4.1), в которых переключения в модели ОУ или переключения законов/режимов управления производятся экспертной системой на основании тех или иных правил вывода в зависимости от результатов оценивания/идентификации состояния и параметров ОУ и/или оценивания параметров внешних возмущений.

IV. Знания используются при оценивании/идентификации. Примером может служить использование экспертных систем для классификации состояний внешней среды.

Наверное, интеллектуальное управление сегодня является самым «модным» разделом теории управления. С одной стороны, модели и методы ИУ открывают большие новые возможности. С другой стороны, отнесение той или иной системы управления к классу «интеллектуальных» очень условно. Действительно, адаптивные системы управления 60–70-х годов XX века были «интеллектуальными» по сравнению со своими неадаптивными предшественниками. СУ, основанные на моделях, используют и накапливают в процессе своего функционирования знания о модели ОУ, то есть могут трактоваться и как основывающиеся на знаниях. И т.д. С третьей стороны, следует иметь в виду, что, как и любой «моде», интеллектуальному управлению пока еще зачастую сопутствуют завышенные ожидания (особенно со стороны непрофессионалов), необоснованные биологические аналогии (особенно в области ИНС и ГА) и использование соответствующей терминологии для создания иллюзии научности и актуальности.

19. Важным основанием классификации СУ является способность их элементов к так называемому стратегическому поведению – самостоятельному принятию решений в соответствии с собственными интересами. Проявлениями стратегического поведения являются [19–21]:

– самостоятельное целеполагание, целенаправленность поведения (сознательное искажение информации, невыполнение обязательств и т.д.);

– рефлексия (нетривиальная взаимная информированность, дальновидность, эффект обмена ролями и т.п.);

– ограниченная рациональность (принятие решений в условиях неопределенности и ограничений на объем обрабатываемой информации);

– кооперативное и/или конкурентное взаимодействие (образование коалиций, информационное и другое противодействие).

Аппаратом моделирования ОУ, способных к стратегическому поведению, являются *теория принятия решений* [16, 22, 30] и *теория игр* [25, 37, 45, 48] (в том числе иерархических

игр [8]) – см. главу 5. Стратегическое поведение субъектов имманентно организационному управлению – см. [21].

Сводка классификаций систем управления приведена в таблице В.1.3.

Таблица В.1.3. Классификации систем управления

№	Основания классификации	Значения признаков
1.	Тип управления	1) Автоматическое управление (управляющая и управляемая системы являются техническими или кибернетическими объектами); 2) автоматизированное управление (управляющая система является субъектом, а управляемая система является техническими или кибернетическим объектом); 3) организационное управление (управляющая и управляемая системы являются субъектами).
2.	Цель управления	Стабилизация, слежение, оптимизация.
3.	Вид управления	1) Управляющее воздействие не зависит от состояния/выхода ОУ (разомкнутые системы): – зависит от времени (программное управление); – зависит от возмущения (управление по возмущению); 2) управляющее воздействие зависит от состояния/выхода ОУ (управление с обратной связью); 3) комбинированное.
4.	Модель объекта управления	1) Линейная (линейные системы); 2) нелинейная (нелинейные системы).
5.	Время	1) Непрерывное (непрерывные системы); 2) дискретное (дискретные системы).
6.	Изменение свойств ОУ во времени	1) Стационарный ОУ (параметры/характеристики не меняются во времени); 2) нестационарный ОУ (параметры/характеристики изменяются во времени).

Таблица В.1.3 (продолжение)

7.	Размерность входов и выходов	1) Одномерные системы; 2) многомерные системы.
8.	Возмущения	1) Отсутствуют; 2) присутствуют: – известные, – неизвестные: – ограниченные, – случайные.
9.	Неопределенность	1) Отсутствует (детерминированные системы); 2) Присутствует (системы с неопределенностью): – интервальная, – вероятностная, – нечеткая. Относительно: – возмущений, – начальных значений и/или граничных условий, – модели объекта управления, – структуры, – параметров, – выхода, – их комбинаций.
10.	Число объектов управления	1) Одноэлементные ОУ; 2) многоэлементные ОУ.
11.	Способность приспособления к изменяющимся внешним условиям	1) Неадаптивные; 2) адаптивные.
12.	Распределенность одного ОУ	1) Системы с сосредоточенными параметрами; 2) системы с распределенными параметрами.
13.	Структура ОУ	1) Базовая; 2) сетевая; 3) иерархическая; 4) смешанная.

Таблица В.1.3 (продолжение)

14.	Число управляющих систем	1) Одна; 2) несколько (многоэлементные СУ).
15.	Структура СУ	1) Базовая; 2) веерная; 3) децентрализованная; 4) распределенная. 1) Двухуровневая; 2) многоуровневая.
16.	Связи между управляющей и управляемой системой	1) Базовые; 2) сетевые (сетевое управление).
17.	Автономность ОУ	1) Неавтономные; 2) автономные.
18.	Использование знаний	1) Знания не используются; 2) управление на основе знаний.
19.	Проявления стратегического поведения	1) Отсутствуют; 2) целеполагание и/или выбор состояния; 3) рефлексия; 4) ограниченная рациональность; 5) кооперативное и/или конкурентное взаимодействие.

Дополнительные основания классификации. В качестве отступления отметим, что существует еще ряд распространенных оснований классификации систем управления, пользоваться которыми мы не будем, вынося соответствующие аспекты за рамки настоящей книги.

Современная теория управления исследует проблемы управления различными классами *объектов* управления, разрабатывая или используя соответствующие *методы* и *средства управления* – см. рис. В.1.7. Ниже речь пойдет в основном о «методах» управления, но средства управления и природа объектов управления также являются важными основаниями классификаций систем управления.

20. Различают *измерительные, преобразовательные, вычислительные* и *исполнительные средства управления*. В частности, к измерительным средствам относят и тесно связанные

с проблематикой управления подвижными объектами системы навигации.

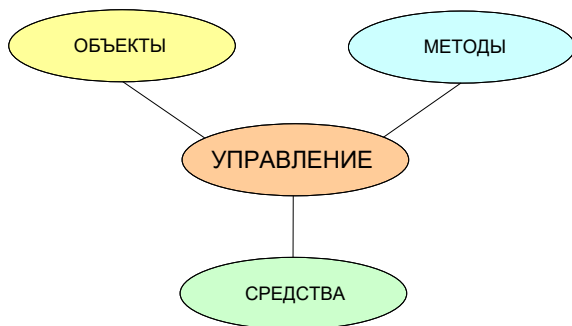


Рис. В.1.7. Объекты, методы и средства управления

21. За полтора века своего развития (начиная с пионерских работ Д. Максвелла [47] и И. Вышнеградского [7]) теория управления охватила множество классов объектов управления – см. рис. В.1.8 [19]: *технические, экономические, экологические, живые и социальные системы*. Все чаще объектами управления становятся так называемые *системы междисциплинарной природы* – организационно-технические, социально-экономические, эколого-экономические, социально-экологические и другие системы [20].

Каждый из этих классов ОУ может быть в свою очередь декомпозирован. Например, среди технических систем выделяют такие типовые прикладные направления, как:

- авиация и космос;
- морские подвижные объекты;
- промышленное производство;
- транспорт (авто, железнодорожный и др.);
- энергетика;
- сельское хозяйство;
- робототехника (производственные роботы и мобильные роботы).

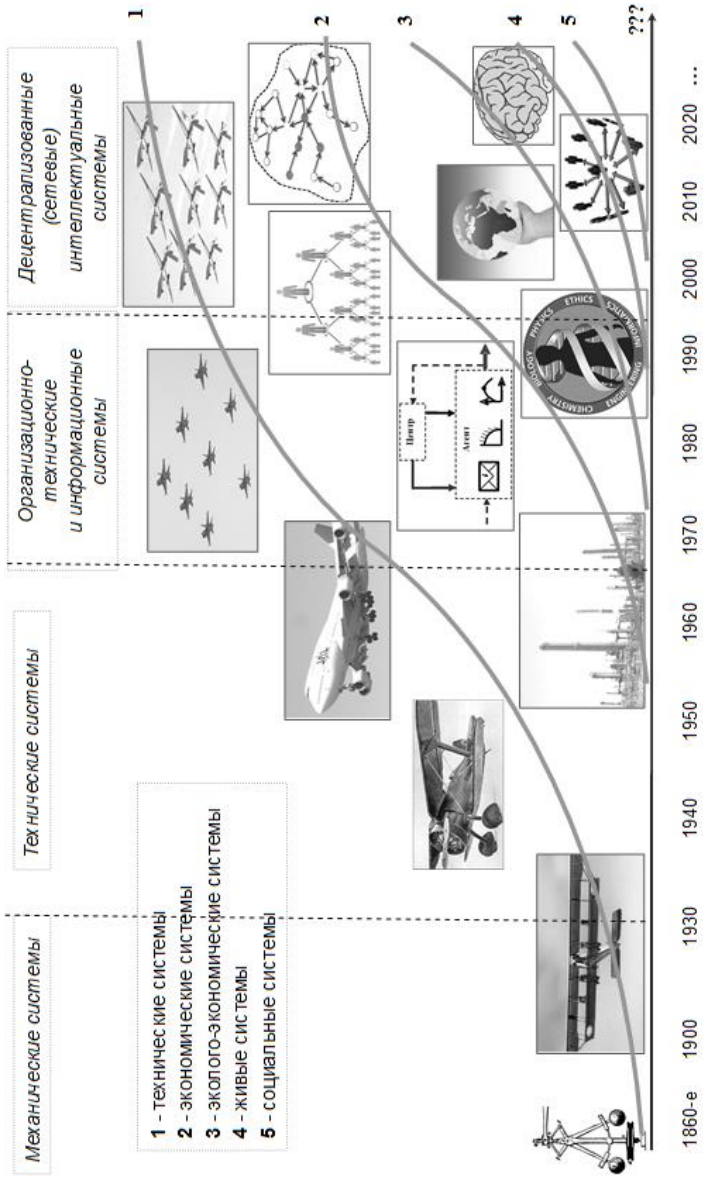


Рис. В.1.8. Классы объектов управления

Каждый из этих классов ОУ обладает своей спецификой, требующей учета при разработке соответствующих систем управления – см., например, второй том справочника [59].

22. Задачи управления сложными системами, как правило, образуют гетерогенную иерархию, типовой вид которой приведен на рис. В.1.9 [19].

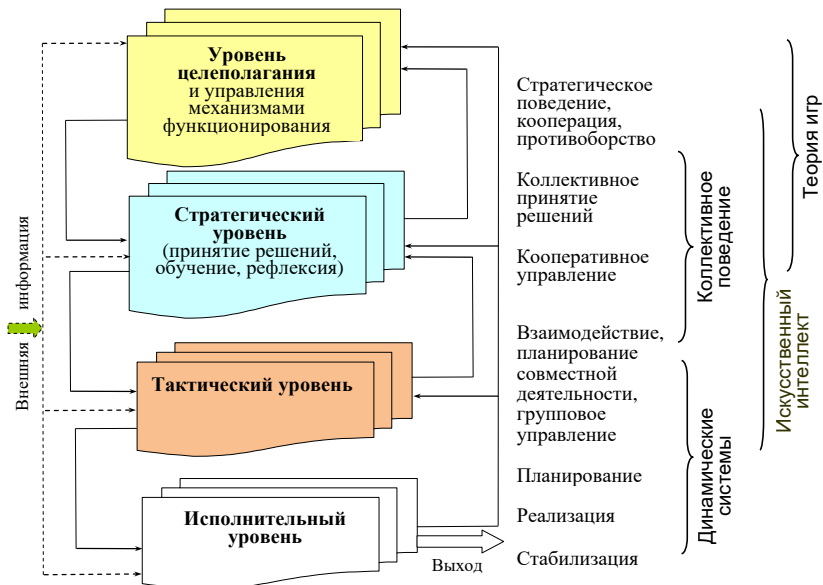


Рис. В.1.9. Иерархическая структура задач управления

На нижнем – исполнительном – уровне иерархии задач управления осуществляется «реализация» выхода, например, стабилизация (быть может, адаптивная) движения по заданной траектории. На этом уровне используется аппарат теории динамических систем и ТАУ (программное, позиционное, робастное и адаптивное управление, см. также введение к главе 4).

На тактическом уровне осуществляется выбор планов и состояний, в том числе с учетом взаимодействия с другими автономными объектами и субъектами. Например, для задач группового управления и кооперативного управления (Cooperative Control) [12, 35] – в том числе планирования миссии – могут

быть использованы методы дискретной оптимизации и разнообразные средства искусственного интеллекта: нейросетевые, эволюционные, логические и другие.

Стратегический уровень отвечает за принятие решений, достижение целей, обучение и рефлексию. На этом уровне, как правило, добавляется использование аппарата теории принятия решений и теории игр.

И, наконец, высший уровень (*уровень целеполагания*) соответствует принципам выбора целей и механизмов функционирования/управления.

23. Математический аппарат, используемый для построения модели ОУ. Здесь разнообразие колоссально: например, регулярно проходят представительные конференции по использованию в задачах управления методов математической логики, случайных процессов, математической физики, исследования операций, параллельных вычислений, дискретной оптимизации и т.д.

24. Функциональные свойства ОУ и/или СУ, которые необходимо обеспечить: *надежность, безопасность* (включая информационную и кибербезопасность), *отказоустойчивость, живучесть, стоимость* (на всем жизненном цикле), *качество дополненной реальности, энергоэффективность, экологичность* и т.п.

Структура изложения. Имея приведенное выше в предисловии описание «классической теории управления» и систему классификаций систем управления (см. таблицу В.1.3), можно, наконец, ответить на вопрос о том, что такое «дополнительные главы». Ответ таков: на сегодняшний день «*дополнительными*» по отношению к классической теории управления являются такие свойства систем управления как: *многоэлементность, функционирование в условиях неопределенности, существенное использование моделей ОУ и внешней среды и знаний о них, адаптивность, распределенность (управляющих и/или управляемых систем), сетевая структура коммуникаций и стратегическое поведение элементов.*

Перечисленные свойства можно структурировать, в том числе условно выделив следующие ключевые категории: *неопределенность, оптимизация, распределенность и сети, ис-*

кусственный интеллект и стратегическое поведение (см. рис. В.1.10), каждой из которых ниже отведена отдельная глава.



Рис. В.1.10. Структуризация глав

Глава 1. «Неопределенность» (Uncertainty). В первой главе рассматриваются системы, основывающиеся на моделях – см. рис. В.1.4 – использующих оценивание/наблюдателей, идентификацию и адаптацию. В их числе стохастические системы (раздел 1.1), адаптивные системы (раздел 1.2), идентификация систем управления (раздел 1.3), управление с итеративным обучением (раздел 1.4).

Раздел 1.1. «Стохастические системы» (Stochastic Systems) [41, 56] посвящен динамическим системам, эволюция вектора состояния которых в дискретном времени зависит от воздействия *случайных факторов*, которые могут влиять как на сам объект, так и на получаемую информацию о его состоянии. Рассматривается линейно-квадратичная задача *стохастического управления по неполным данным*, значительное внимание уделяется оптимальной *фильтрации* (выделению полезного сигнала на фоне шума) и *управлению наблюдениями*.

Раздел 1.2. «Системы адаптивного управления» (Adaptive Control Systems [33, 38]) включает рассмотрение адаптивных систем с идентификатором, систем с эталонной моделью, а так-

же методов синтеза неявной эталонной модели, основанных на H_∞ -оптимизации.

Раздел 1.3. «Идентификация систем управления» (Identification of Control Systems) содержит анализ истории развития и современного состояния теории идентификации [31, 40, 58]. В числе современных методов приводится *усовершенствованное управление* (APC – Advanced Process Control) – управление распределенными системами/технологическими процессами, использующее *управление с прогнозирующей моделью* (MPC – Model Predictive Control). Основная идея MPC заключается в том, что в каждый момент времени с учетом всей имеющейся (об ОУ и внешней среде) информации с помощью модели ОУ (см. рис. В.1.4) рассчитывается оптимальное программное управление на несколько последующих шагов, затем реализуется управляющее воздействие, соответствующее первому(-ым) шагу(-ам), после чего цикл повторяется [52, 60].

Раздел 1.4. «Управление с итеративным обучением» (Iterative Learning Control [50, 57]) посвящен моделям улучшения переходных характеристик систем, работающих в *повторяющемся режиме*, что удается достичь за счет накопления и запоминания информации о реализованном процессе, которая затем используется на следующем шаге. Запоминание предыдущих действий, позволяющее на очередном шаге внести коррективы и улучшить результат, отличает данный вид управления от управления с обратной связью и от адаптивного управления, использующих текущие значения состояния управляемой системы. Поэтому *управление с итеративным обучением* можно рассматривать и как интеллектуальное.

Глава 2. «Оптимизация» (Optimization) включает обсуждение трех направлений теории оптимизации, тесно связанных с управлением: оптимизация в задачах большой размерности, распределенная оптимизация и невыпуклая оптимизация.

Раздел 2.1. «*Оптимизация в задачах большой размерности*» (Large-Scale Optimization) включает как описание наиболее распространенных алгоритмов *выпуклой оптимизации*, так и рассмотрение особенностей их применения к задачам большой размерности. Приводится краткий обзор наиболее распространенных программных средств оптимизации.

Раздел 2.2. «Распределенная оптимизация» (Distributed Optimization). Основная идея *распределенной оптимизации* заключается в следующем: задача поиска экстремума функции многих переменных декомпозируется на ряд подзадач, решаемых отдельными агентами (программными или физическими) в условиях ограниченной информации. Например, каждый из агентов «отвечает» за свою переменную и на очередном шаге выбирает ее значение, зная предыдущие выборы некоторых своих «соседей» (коммуникации между агентами имеют сетевую структуру – см. также разделы 3.2 и 3.3) и стремясь максимизировать свою локальную «целевую функцию». Задача заключается в том, чтобы по заданной исходной функции найти «целевые функции» агентов и такие правила/структуру их взаимодействия, чтобы автономное поведение агентов приводило к реализации централизованного оптимума (в *алгоритмической/вычислительной теории игр* [32] соответствующего, например, равновесию Нэша игры агентов или эффективному по Парето их состоянию – см. раздел 5.3).

Раздел 2.3. «Невыпуклая оптимизация». Если задачи выпуклой оптимизации давно стали массово использоваться в теории управления (см. [18, 26]), то интерес к *невыпуклой оптимизации* активно растет, в том числе в связи с задачами классификации и задачами обучения искусственных нейронных сетей (см. раздел 4.3). Основное внимание в разделе 2.3 уделяется проекционным методам и выделению тех классов невыпуклых объектов, для которых эти методы дают хорошие результаты. Подробно анализируется свойство *проксимальной гладкости* множеств, позволяющее в ряде случаев отказаться от выпуклости без особых потерь.

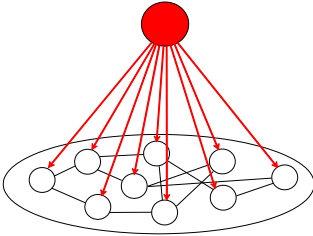
Глава 3. «Распределенность и сети» (Networks). Распределенность в «пространстве» может относиться к:

– одному объекту управления (модели управления *системами с распределенными параметрами* рассматриваются в разделе 3.1) – см. п. 12 классификации выше;

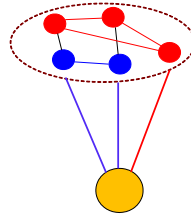
– нескольким взаимосвязанным автономным объектам управления (Control of Network); пример – *многоагентные системы*, характеризуемые сетевой структурой ОУ, которые рассматриваются в разделе 3.2, – см. п. 10 классификации выше;

– управляющим системам: *децентрализованное* (при одном ОУ¹) и *распределенное* (при нескольких ОУ) управление – см. п. 15 классификации выше и рис. В.1.11.

Централизованное управление
(веерная структура)



Децентрализованное управление



Распределенное управление

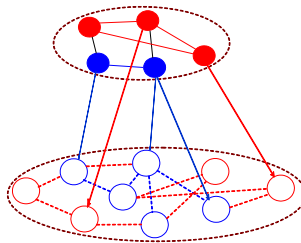


Рис. В.1.11. Централизованное, децентрализованное и распределенное управление

Кроме того, связи управляющих и управляемых систем (*сетевое управление*² рассматривается в разделе 3.3) также могут быть «распределенными», то есть сетевыми (обмен информацией между управляющей и управляемой системой осу-

¹ Примером являются матричные структуры организационного управления, в которых один подчиненный может иметь несколько руководителей [21].

² Подчеркнем, что русскоязычный термин «сетевое управление» в литературе употребляется в двух смыслах. Первый – «управление сетью» (*Control of Network*), в первую очередь, сеть взаимосвязанных и взаимодействующих автономных агентов (см. раздел 3.2). Второй – «управление через сеть» (*Networked Control*, см. раздел 3.3).

ществляется через информационно-коммуникационную сеть) – см. п. 16 классификации выше и рис. В.1.12.

Централизованное сетевое управление Распределенное сетевое управление

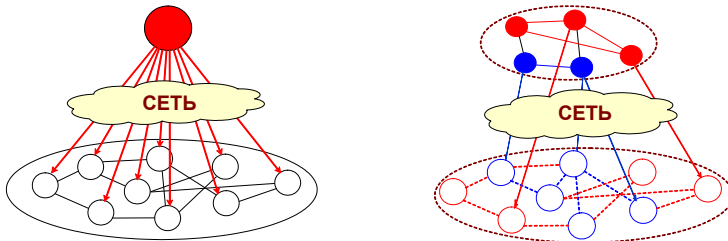


Рис. В.1.12. Централизованное и распределенное сетевое управление

Одной из глобальных тенденций последних двадцати лет является переход от *централизованного управления*, когда одна управляющая система управляет каждой из управляемых систем (*верная структура СУ*) и взаимодействием между ними, сначала к *децентрализации системы управления* (над сетью взаимодействующих управляемых систем – см. модели *многоагентных систем* в разделе 3.2 – надстраивается распределенная система управления), а затем к осуществлению *коммуникаций* между управляющими и управляемыми системами через сеть – см. рис. В.1.12.

Таким образом, распределенность и «сетевизм» на сегодня могут иметь место и в управляемой системе, и в управляющей, и во взаимодействии между ними [19, 28]. Более того, зачастую управляющая система оказывается «*погруженной*» в объект управления, в результате получается единая (быть может, с внутренней «иерархической» структурой) сеть взаимодействующих агентов.

В настоящее время происходит переход от так называемой парадигмы «*си в кубе*» (C^3), когда совместно решаются *задачи управления, вычислений и связи* (Control + Computations + Communications) – см. раздел 3.3, к концепции «*си в пятой*» (C^5) – Control + Computations + Communications + Costs + lifeCycle, когда упомянутые задачи должны решаться в ком-

плексе с учетом стоимостных (в широком смысле) аспектов на протяжении всего *жизненного цикла* рассматриваемой системы, включая в том числе этап совместного проектирования управляющей и управляемой систем [19].

Раздел 3.1. «Системы с распределенными параметрами» (Distributed Parameter Systems) [34, 42] посвящен задачам управления системами, поведение которых описывается *дифференциальными уравнениями в частных производных*. Рассмотрены различные типы управления такими системами: управление граничными условиями, подвижное управление, управление с помощью точечных воздействий, распределённое управление. Приведены примеры управления колебаниями, нагревом, распространением ограниченного звукового пучка, управления фильтрационными потоками, а также управления разработкой нефтяных месторождений.

Раздел 3.2. «Сетевые многоагентные системы» (Multi-Agent Systems) [53, 55, 61, 65] отражает тематику управления сетями взаимодействующих автономных агентов. Рассмотрены базовые модели асимптотического *консенсуса*, критерии достижимости которого формулируются в теоретико-графовых терминах свойств матриц коммуникаций между агентами. Содержательными интерпретациями являются: сходимость мнений экспертов, координация взаимодействия мобильных роботов, синхронизация колебательных процессов (например, в электроэнергетических сетях), самоорганизация сетей связи и др.

Раздел 3.3. «Сетевые системы управления» (Networked Control). *Сетевое управление* – управление распределенной (состоящей из нескольких ОУ) системой одной или несколькими управляющими системами (Distributed Control), при котором связь между управляемыми и управляющими подсистемами осуществляется через *информационно-коммуникационную сеть* [28, 46, 49, 64]. Наличие этой сети, с одной стороны, повышает надежность, отказоустойчивость, декомпозируемость системы управления. С другой стороны, необходимо принимать во внимание и включать в ее модель следующие факторы: ограниченную пропускную способность (в условиях дискретизации сигналов по времени и уровню) каналов связи; запаздывание/задержку и возможную потерю пакетов информации; без-

опасность сети; архитектуру системы, учитывающую «распределенность» системы управления.

Глава 4. «Интеллектуальное управление» (Intelligent Control) включает три раздела, посвященных системам с переключениями, нечетким системам управления и искусственным нейронным сетям в системах управления.

Раздел 4.1. «Системы с переключениями» (Switched Systems). Многие системы, встречающиеся на практике, характеризуются *неоднородной динамикой* (см., в том числе, *системы с переменной структурой* [9, 10]). Системы, в которых непрерывная динамика взаимодействует с дискретными событиями, обычно называют *гибридными*. Дискретные события могут представлять собой просто переключения непрерывной динамики из определенного класса: детерминированные или случайные, зависящие от времени и/или состояния системы или нет и т.п. Такие системы называются *системами с переключениями* [43, 54]. Переключения могут осуществляться и некоторой системой более высокого уровня (см. рис. В.1.9), например, *экспертной системой* на основе правил логического вывода [6]. Именно поэтому данный раздел условно помещен в главу, посвященную интеллектуальному управлению.

Существенное внимание исследователей при изучении гибридных динамических систем уделяется их *устойчивости*, в том числе задачам об устойчивости при произвольных переключениях; о максимальной частоте переключений, сохраняющей устойчивость; о стабилизации системы в целом за счет использования *закона переключений* между составляющими подсистемами и др.

Раздел 4.2. «Нечеткие системы управления» (Fuzzy Control Systems). Одно из массовых направлений в интеллектуальном управлении представляет такая область, как использование аппарата *нечетких множеств* при формализации плохо структурированных и субъективных знаний о сложных управляемых системах (наибольший опыт накоплен в задачах синтеза *нечетких регуляторов* для управления *технологическими процессами* и установками) [5, 14, 15, 29]. В разделе рассматриваются логико-лингвистические, аналитические, ПИД-, обучаемые и ги-

бридные нечеткие регуляторы, обсуждаются их свойства, преимущества и недостатки.

Раздел 4.3. «Искусственные нейронные сети» (Artificial Neural Networks). Управление с использованием *искусственных нейронных сетей* уже несколько десятилетий является, наверное, наиболее обширным разделом интеллектуального управления [5, 29]. В разделе рассмотрена эволюция этого научного направления, отражены современные высокоэффективные подходы *глубокого обучения*.

Глава 5. «Стратегическое поведение» (Strategic Behavior). В главе рассматриваются дифференциальные (раздел 5.1), кооперативные (раздел 5.2), а также иерархические и рефлексивные (раздел 5.3) игры, отражающие различные аспекты управления системами, элементы которых способны к стратегическому поведению.

Раздел 5.1. «Дифференциальные игры» (Differential Games). В отличие от задач *оптимального управления*, в *дифференциальной игре* цели игроков противоположны, и каждый из игроков принимает решение о своем векторе управлений, от которых зависит эволюция состояния системы, описываемая дифференциальными уравнениями или дифференциальными включениями [1, 3, 13, 24, 39].

Наиболее исследованными являются дифференциальные *игры преследования*, в которых количество игроков равно двум, одного из них называют *догоняющим*, другого *убегающим*. Цель догоняющего: приведение вектора состояния системы на заданное множество за минимальное время; цель убегающего – по возможности отложить этот момент.

Отдельным разделом теории дифференциальных игр являются игры с *неполной информацией*, к которым относятся *игры поиска* [24].

Раздел 5.2. «Кооперативные игры» (Cooperative Games). При рассмотрении *конфликтно-управляемых процессов*, развивающихся во времени, возникает новая проблема – *динамической устойчивости* или *состоятельности во времени* выбранных на основе того или иного принципа оптимальности решений, принимаемых игроками, осуществляющими управление динамической системой. Эта проблема состоит в том, что реше-

ние, найденное в начале игры на основе согласованного участниками конфликтно-управляемого процесса *принципа оптимальности*, может оказаться не удовлетворяющим этому принципу в процессе реализации выбранного решения. В разделе рассмотрены вопросы, связанные с построением различных принципов оптимальности в динамических и дифференциальных играх и описано решение проблемы динамической устойчивости (состоятельности во времени) решений, порожденных тем или иным принципом оптимальности [25, 62, 63].

Раздел 5.3. «Иерархические и рефлексивные игры» (Hierarchical and Reflexive Games). *Теория игр* изучает модели взаимодействия рациональных (принимающих решения самостоятельно, в соответствии с собственными предпочтениями) агентов [37, 45, 48]. Для нее традиционной является схема, когда сначала описывается «модель игры»; затем выбирается концепция *равновесия*, определяющая, что понимается под устойчивым исходом игры; после чего может формулироваться та или иная задача управления – выбора значений управляемых «параметров игры», приводящих к реализации требуемого равновесия [8, 21].

В *иерархических играх* управление присутствует в явном виде – как действие или стратегия игрока, делающего первый ход.

Рефлексивные игры представляют собой адекватный и удобный аппарат описания и решения задач *информационного управления* – воздействия на информированность субъектов с целью побуждения их к принятию требуемых решений.

Вне рассмотрения. Отметим, что вне настоящей работы остались отмеченные в пп. 20–24 классификации систем управления *средства управления*, природа и «отраслевая» специфика объектов управления, а также *функциональные свойства* систем управления. Кроме того, почти не рассмотрены *системы с запаздыванием*, *киберфизические системы* [36, 51], человеко-машинные (*эргатические*) системы, *многоуровневые СУ* и проблематика управления *жизненными циклами* сложных систем [2].

Литература

- 1 АЙЗЕКС Р. *Дифференциальные игры*. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
- 2 БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Методология комплексной деятельности*. – М.: Ленанд, 2018. – 320 с.
- 3 ВАЙСБОРД Э.М., ЖУКОВСКИЙ В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.
- 4 ВАПНИК В.Н., ЧЕРВОНЕНКИС А.Я. *Теория распознавания образов*. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
- 5 ВАСИЛЬЕВ В.И., ИЛЬЯСОВ Б.Г. *Интеллектуальные системы управления. Теория и практика*. – М.: Машиностроение, 2009. – 392 с.
- 6 ВАСИЛЬЕВ С.Н., ЖЕРЛОВ А.К., ФЕДОСОВ Е.А., ФЕДУНОВ Б.Е. *Интеллектуальное управление динамическими системами*. – М.: Физматлит, 2000. – 352 с.
- 7 ВЫШНЕГРАДСКИЙ И.А. *О регуляторах прямого действия* // Известия СПб. практического технологического института. – 1877. – Том 1. – С. 21–62.
- 8 ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
- 9 ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К. *Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности*. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 352 с.
- 10 ЕМЕЛЬЯНОВ С.В. *Системы автоматического управления с переменной структурой*. – М.: Наука, 1967. – 336 с.
- 11 *Интеллектуальные системы автоматического управления* / Под ред. И.М. Макарова, В.М. Лохина. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- 12 КАЛЯЕВ И.А., ГАЙДУК А.Р., КАПУСТЯН С.Г. *Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов*. – М.: Физматлит, 2009. – 280 с.
- 13 КРАСОВСКИЙ Н.Н., СУББОТИН А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. – М.: Физматлит, 1974. – 456 с.

- 14 КУДИНОВ Ю.И., КЕЛИНА А.Ю., КУДИНОВ И.Ю. и др. *Нечеткие модели и системы управления*. – М.: Ленанд, 2017. – 328 с.
- 15 КУДИНОВ Ю.И., ПАЩЕНКО Ф.Ф. *Теория автоматического управления (с использованием MATLAB-SIMULINK)*. – СПб.: Лань, 2018. – 312 с.
- 16 ЛАРИЧЕВ О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Логос, 2000. – 296 с.
- 17 МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем*. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
- 18 НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Методы выпуклой оптимизации*. – М.: МЦНМО, 2010. – 281 с.
- 19 НОВИКОВ Д.А. *Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития*. – М.: Ленанд, 2016. – 160 с.
- 20 НОВИКОВ Д.А. *Методология управления*. – М.: Либроком, 2011. – 128 с.
- 21 НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – Физматлит, 2012. – 604 с.
- 22 ОРЛОВ А.И. *Теория принятия решений*. – М.: Экзамен», 2005. – 656 с.
- 23 ПАНТЕЛЕЕВ А.В., БОРТАКОВСКИЙ А.С. *Теория управления в примерах и задачах*. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
- 24 ПЕТРОСЯН Л.А., ГАРНАЕВ А.Ю. *Игры поиска*. – СПб.: СПбГУ, 1992. – 216 с.
- 25 ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Теория игр*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
- 26 ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию*. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 392 с.
- 27 ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
- 28 *Проблемы сетевого управления* / Под. ред. А.Л. Фрадкова. – М.-Ижевск: ИКИ, 2015. – 391 с.

- 29 РУТКОВСКАЯ Д., ПИЛИНЬСКИЙ М., РУТКОВСКИЙ Л. *Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы*. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.
- 30 РЫКОВ А.С. *Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация*. – М.: МИСИС, 2005. – 352 с.
- 31 ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. – М.: Физматлит, 1963. – 553 с.
- 32 *Algorithmic Game Theory* / Eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. – N.Y.: Cambridge University Press, 2009. – 776 p.
- 33 ASTROM K., WITTENMARK B. *Adaptive Control*. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 1994. – 574 p.
- 34 AZIZ A., WINTAGE J., BALAZ M. *Control Theory of Systems Governed by Partial Differential Equations*. – N.Y.: Academic Press, 1977. – 278 p.
- 35 *Cooperative Control and Optimization* / Ed. by R. Murphey, P. Pardalos. – Dordrecht: Kluwer, 2002. – 303 p.
- 36 *Cyber-Physical Systems: Foundations, Principles and Applications* / Ed. by H. Song, D. Rawat, S. Jeschke, C. Brecher. – N.Y.: Academic Press, 2017. – 514 p.
- 37 FUDENBERG D., TIROLE J. *Game Theory*. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
- 38 IOANNOU P., SUN J. *Robust Adaptive Control*. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. – 821 p.
- 39 ISAACS R. *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. – Dover: Dover Publications, 1999. – 416 p.
- 40 KEESMAN K. *System Identification: An Introduction*. – Heidelberg: Springer, 2011. – 323 p.
- 41 KUMAR P., VARAIYA P. *Stochastic Systems: Estimation, Identification, and Adaptive Control*. – N.Y.: SIAM, 2015. – 376 p.
- 42 LASIECKA I. *Mathematical Control Theory of Coupled PDEs*. – Charlottesville: SIAM, 2002. – 242 p.

- 43 LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*. – Boston: Birkhauser, 2003. – 233 p.
- 44 LIU J. *Intelligent Control Design and Matlab Simulation*. – Singapore: Springer, 2017. – 294 p.
- 45 MASCHLER M., SOLAN E., ZAMIR S. *Game Theory*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013. – 1008 p.
- 46 MATVEEV A., SAVKIN A. *Estimation and Control over Communication Networks*. – Boston: Birkhauser, 2009. – 533 p.
- 47 MAXWELL J.C. *On Governors* // Proc. of the Royal Society of London. – 1868. – Vol. 16. – P. 270–283.
- 48 MYERSON R. *Game Theory: Analysis of Conflict*. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
- 49 *Networked Embedded Systems Handbook* / Ed. by R. Zurawski. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 837 p.
- 50 OWENS D. *Iterative Learning Control. An Optimization Paradigm*. – London: Springer, 2016. – 456 p.
- 51 RAJEEV A. *Principles of Cyber-Physical Systems*. – Massachusetts: The MIT Press, 2017. – 459 p.
- 52 RAWLINGS J., MAYNE D., DIEHL V. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. – Madison: Nob Hill Publishing, 2017. – 770 p.
- 53 REN W., YONGCAN C. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks*. – London: Springer, 2011. – 307 p.
- 54 SCHAFT A., SCHUMACHER H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. – Heidelberg: Springer, 2000. – 174 p.
- 55 SHOHAM Y., LEYTON-BROWN K. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 504 p.
- 56 SPEYER J, CHUNG W. *Stochastic Processes, Estimation and Control*. – N.Y.: SIAM, 2008. – 400 p.
- 57 SUTTON R, BARTO A. *Reinforcement Learning: An Introduction*. – Cambridge: The MIT Press, 2017. – 427 p.
- 58 TANGIRALA A. *Principles of System Identification: Theory and Practice*. – Boca Raton: CRC Press, 2014. – 908 p.

- 59 *The Control Handbook* / Ed. by W. Levine. – New York: CRC Press, 2010. – Vol. I–III. – 3526 p.
- 60 WANG L. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using Matlab*. – Berlin: Springer, 2009. – 378 p.
- 61 WOOLDRIDGE M. *An Introduction to Multi-Agent Systems*. – New York: John Wiley and Sons, 2002. – 376 p.
- 62 YEUNG D., PETROSJAN L. *Cooperative Stochastic Differential Games*. – Heidelberg: Springer, 2006. – 242 p.
- 63 YEUNG D., PETROSJAN L. *Subgame Consistent Cooperation*. – Heidelberg: Springer, 2016. – 520 p.
- 64 YOU K., XIAO N., XIE L. *Analysis and Design of Networked Control Systems*. – Heidelberg: Springer, 2015. – 321 p.
- 65 YU W., WEN G., CHEN G., CAO J. *Distributed Cooperative Control of Multi-Agent Systems*. – N.Y.: Wiley, 2017. – 350 p.

В.2. КИБЕРНЕТИКА

Новиков Д.А.¹

1. Введение

Кибернэтика (от др.-греч. κυβερνητική – «искусство кормчего», κυβερνή – административная единица; объект управления, содержащий людей²) – наука об общих закономерностях процессов *управления и передачи информации* в различных системах, будь то *машины, живые организмы* или *общество* [32]. Она фокусирует внимание на том, как система (цифровая, механическая или биологическая) обрабатывает информацию, реагирует на неё и изменяется или может быть изменена для того, чтобы лучше выполнять свои функции (в том числе по управлению и коммуникации).

Изучение кибернетики, играющей по отношению к теории управления роль *метанауки*, имеет важное общеобразовательное значение, так как формирует целостное современное научное мировоззрение.

В настоящем разделе рассматривается история и современное состояние кибернетики, обсуждаются перспективы ее развития. Список литературы содержит в основном классические монографии, с которыми должен быть знаком каждый специалист по теории управления.

2. Кибернетика в XX веке

Цель настоящего подраздела – рассмотреть кратко историю кибернетики и описать, что на сегодняшний день входит в «классическую» кибернетику (условно ее можно назвать «*кибернетикой 1.0*»).

В Древней Греции термин «кибернетика» использовался для обозначения искусства государственного деятеля, управляющего городом (например, в «Законах» Платона).

¹ Дмитрий Александрович Новиков, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; чл.-корр. РАН (novikov@ipu.ru).

² От этого корня происходят слова «government», «губернатор», «губерния», «губернер».

В своей классификации наук А. Ампер (1834, [38, 52]) относил кибернетику (как «науку управления вообще») к политическим наукам – в своей книге «Опыт философских наук» кибернетику он определил как науку о текущей политике и практическом управлении государством (обществом).

Б. Трентовский (1843, [66]) определял ее как «искусство управления народом».

А.А. Богданов в своей «Тектологии» (1925, [11]) исследовал организационные принципы, общие для всех видов систем, превосхитив многие подходы кибернетики XX века.

П.К. Анохин (1935, [2]) первым сформулировал общую роль обратной связи в функционировании целенаправленных систем и управлении ими.

Термин «*кибернетика*» в современном, ставшем хрестоматийным понимании с как «наука об управлении и связи в животном и машине» – впервые был предложен *Норбертом Винером* в 1948 году (см. его одноименную пионерскую монографию [12]). Далее Винер добавил (1950) к объектам, изучаемым кибернетикой, общество [13]. Классиками первых лет развития кибернетики, помимо Н. Винера, являются *Уильям Эшби*¹ (1956, [49]) и *Стаффорд Бир* (1959, [9]), сделавшие акценты соответственно на биологических и экономических ее аспектах.

Кибернетика является *междисциплинарной наукой*. Она возникла на стыке математики, логики, семиотики, физиологии, биологии, социологии. Ей присущ анализ и выявление общих принципов и подходов в процессе научного познания.

Таким образом, кибернетику 1.0 (или просто **кибернетику**) можно рассматривать как «*науку об управлении и обработке информации в животном, машине и обществе*». Альтернативой является определение **Кибернетики** (с большой буквы, чтобы там, где это принципиально, отличать ее от кибернетики) как «*науки об общих закономерностях управления и обра-*

¹ У. Эшби в числе прочего принадлежит введение и исследование категорий «разнообразие» и «самоорганизация», а также первое использование в кибернетике терминов «гомеостат» и «черный ящик».

ботки информации в животном, машине и обществе». Различие определений, заключающееся в добавлении во втором случае «общих закономерностей», очень существенно и не раз будет подчеркиваться и использоваться ниже.

В первом случае речь идет о «зонтичном бренде» (*синтетической науке*), то есть об «объединении» результатов всех наук (см. рис. В.2.1), занимающихся исследованием проблем управления и обработки информации в животном, машине и обществе; а во втором случае – о метанауке, условно говоря – о частичном «пересечении» этих результатов¹, то есть тех из них, которые являются общими для всех наук-компонентов.



Рис. В.2.1. Состав и структура кибернетики 1.0

¹ Образно говоря – стержне «зонтика».

Условием возникновения (первые два пункта) и выживания (третий пункт) любой синтетической науки являются:

- 1) достаточный уровень развития наук-компонентов;
- 2) возникновение множества *аналогий* (а затем – *обобщений*), между частными результатами наук-компонентов;
- 3) возможность достаточно легкого и быстрого получения собственных нетривиальных теоретических и прикладных результатов и их популяризация как среди широкого научного сообщества, так и среди «обывателей».

Применительно к кибернетике к середине 40-х годов XX века первые два условия были выполнены (см. [32]), а длительное сотрудничество Н. Винера с биологами, наряду с широтой и глубиной его профессиональных интересов (вспомним хотя бы винеровский случайный процесс, пространства Банаха – Винера, уравнение Винера – Хопфа), обеспечили «субъективное» выполнение этих условий. Как говорил впоследствии сам Н. Винер в интервью журналу «Вопросы философии» (1960, №9): «Цель состояла в том, чтобы объединить усилия в различных отраслях науки, направить их на *единообразное решение сходных проблем*». Третий пункт – и быстрое получение результатов, и их популяризация – также был успешно реализован (см. [32]).

Интеграция результатов различных наук, обоснование возможности их применения к различным объектам (см. рис. В.2.2) привели к рождению в 1948 году новой науки – *винеровской кибернетики*.

Наука как система знаний имеет в числе прочих следующие гносеологические, социальные и другие *функции* [32]:

– *описательная* (дескриптивная, феноменологическая) – сбор и накопление данных, фактов. С этой функции (ответа на вопрос «как устроен мир?») начинается любая наука, так как она может базироваться только на большом количестве фактического материала. С этой точки зрения кибернетика как синтетическая наука использует в основном результаты своих наук-компонентов;

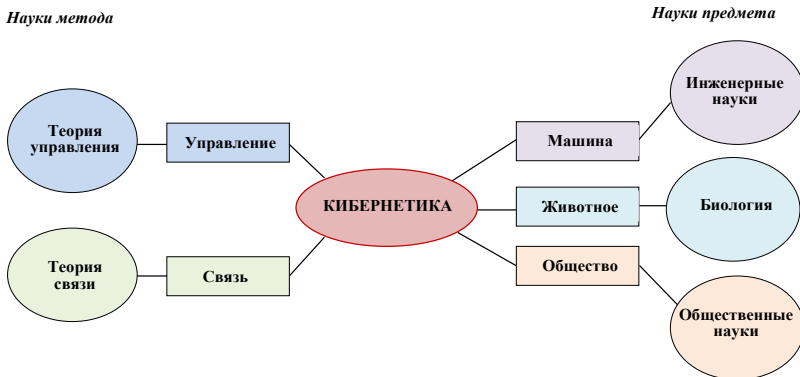


Рис. В.2.2. «Филогенез» винеровской кибернетики

– *объяснительная* (экспликативная) – объяснение явлений и процессов, их внутренних механизмов (ответ на вопрос «почему мир устроен именно так?»). Здесь роль кибернетики простирается уже более ярко, так как даже аналогии могут нести мощную объяснительную функцию;

– *обобщающая* – формулирование законов и закономерностей, систематизирующих и вбирающих в себя многочисленные разрозненные явления и факты (ответ на вопрос «что общего в ...?»). Наверное, основной функцией кибернетики является именно обобщающая, так как обобщения (в виде законов, закономерностей, моделей, исследовательских подходов) составляют основной корпус ее результатов;

– *предсказательная* (прогностическая) – научные знания позволяют заблаговременно предвидеть неизвестные ранее новые процессы и явления (ответ на вопрос «что и почему произойдет?»). Опять же, имея в рамках синтетической науки кибернетики обоснованные аналогии и конструктивные обобщения, можно делать эффективные прогнозы;

– *предписывающая* (нормативная) функция науки – научные знания позволяют организовывать деятельность по достижению тех или иных целей (ответ на вопрос «что и как следует сделать для достижения цели?»). Нормативная функция тесно связана с решением задач *управления*, являющимся одним из предметов кибернетики.

Что сегодня относят к кибернетике (перечислим в порядке убывания условной степени принадлежности – см. также рис. В.2.1):

- *теория управления*;
- *математическая теория связи и информации*;
- *общая теория систем, системотехника и системный анализ*;
- *оптимизация* (в том числе линейное и нелинейное программирование; динамическое программирование; оптимальное управление; нечеткая оптимизация; дискретная оптимизация, генетические алгоритмы и др.);
- *исследование операций* (теория графов, теория игр и статистических решений и др.);
- *искусственный интеллект*;
- *анализ данных и принятие решений*;
- *робототехника*

и другие дисциплины (далее последовательность перечисления, включающего как чисто математические, так и прикладные науки и научные направления, произвольна), включая распознавание образов, искусственные нейронные сети и нейрокомпьютеры, эргатические системы, «нечеткие» системы, математическую логику, теорию идентификации, теорию алгоритмов, теорию расписаний и массового обслуживания, математическую лингвистику, теорию программирования, синергетику и пр. и пр.

Классические монографии и учебники по Кибернетике с ее «собственными» результатами очень немногочисленны – см. [1, 9, 10, 12, 13, 18, 29, 54], а учебники по кибернетике (интересно отметить, что выходили они преимущественно в бывшем СССР) обычно включают в себя многие из перечисленных направлений (в основном относящиеся к управлению техническими системами и к информатике) – см. [15, 22, 25, 27].

Отметим также, что приставка *«кибер»* регулярно порождает новые термины: киберсистема, киберпространство, киберугроза, кибербезопасность и т.д. Если посмотреть еще более широко, то эта приставка охватывает всё связанное с автоматизацией, компьютерами, виртуальной реальностью, интернетом и т.д.

Кибернетической тематике на сегодня в мире посвящены (с явным употреблением термина «кибернетика» в названии) несколько сотен научных центров (институтов, факультетов, кафедр, исследовательских групп) и ассоциаций, сотни журналов и регулярных конференций (см. примеры в [32]).

«**Отраслевая**» кибернетика. Наряду с общей кибернетикой выделяют и «отраслевые» кибернетики [25]. Самым естественным (следующим из расширенного определения Н. Винера) является выделение помимо *теоретической кибернетики* (то есть Кибернетики) трех базовых кибернетик: технической, биологической и социально-экономической.

Возможно и более полное перечисление (в порядке убывания полноты исследованности):

- *техническая кибернетика*;
- *биологическая и медицинская кибернетика*, эволюционная кибернетика, кибернетика в психологии [3, 4, 7, 17, 20, 23, 28, 35, 36, 40, 45, 47, 50, 60, 63];
- *экономическая кибернетика* [9, 10, 19, 31, 51];
- *физическая кибернетика* (точнее – «*кибернетическая физика*¹» как наука об исследовании физических систем кибернетическими методами [43, 46]);

а также *социальная кибернетика, педагогическая кибернетика, квантовая кибернетика, космическая кибернетика* и др. – см. ссылки в [32].

Отдельно, наверное, стоит выделить такую ветвь биологической кибернетики, как *кибернетические модели мозга*, которая сегодня тесно интегрирована с искусственным интеллектом, нейро- и когнитивными науками. Романтическая идея создать кибернетический (компьютерный) мозг, хотя бы отчасти похожий на естественный, стимулировала как отцов-основателей кибернетики (см. работы У. Эшби [50], Г. Уолтера [45],

¹ *Кибернетическая физика – наука об исследовании физических систем кибернетическими методами. В силу развитости (по продолжительности и глубине исследования) моделей физических объектов получаемые в этой области результаты сегодня уже могут формулироваться в виде достаточно общих (и строго обоснованных) законов* (см. [46, с. 38–40]).

М. Арбиба [5], Ф. Джоржа [17], К. Штейнбуха [48] и др.), так и их последователей (современный обзор можно найти в [63]).

В эпоху нарастающей дифференциации наук кибернетика была ярчайшим (и, к сожалению, одним из последних – модные сейчас «конвергентные науки», НБИКС: нано-, био-, информационные, когнитивные науки и гуманитарные социальные технологии – пока еще не полностью реализовали себя в этом смысле) примером синергетического эффекта – успешной попытки интеграции различных наук, поиска их представителями единого языка и общих закономерностей. Действительно, распространенная сейчас «междисциплинарность» является скорее рекламным зонтичным брендом или реальным «стыком» двух или более наук, а подлинная междисциплинарность должна оперировать общими (для нескольких наук) результатами и закономерностями.

В качестве гносеологического отступления отметим, что *диалектическая спираль* «от частного – к обобщениям, от обобщений – к новым частным результатам» характерна для теории любого масштаба – от частного, но целостного направления исследований¹ до полномасштабных научных направлений. Идеи Н. Винера об общих закономерностях управления и связи в системах различной природы явились результатом обобщений некоторых (естественно, не всех!) достижений современных ему теории автоматического управления, теории связи, физиологии и ряда других наук. Появившаяся в результате кибернетика с ключевыми идеями обратной связи, гомеостаза и др. дала толчок для получения новых результатов в управлении, информатике и других науках.

¹ Например, удачный метод решения определенного класса задач теории управления в дальнейшем оказывается применим для решения задач в смежных областях (например, связь, производство и др.). Тем самым он, условно говоря, «перемещается» из теории управления в кибернетику. А затем, возможно (в случае применимости к любым системам, удовлетворяющим его исходным предположениям), этот метод становится достоянием прикладной математики – «гаечным ключом», которым могут пользоваться специалисты в самых разных областях, решая свои задачи («отвинчивая свои гайки»).

3. Кибернетика кибернетики и другие «кибернетики»

Помимо классической винеровской кибернетики за последние более чем полвека появились и другие «кибернетики», явно декларирующие как свою связь с первой, так и стремление её развить.

Наиболее ярким явлением, несомненно, стала *кибернетика второго порядка* (кибернетика кибернетики, Second Order Cybernetics, метакибернетика, новая кибернетика; «порядок», условно говоря, соответствует «рангу рефлексии») – кибернетика кибернетических систем, которая связана в первую очередь с именами М. Мид, Г. Бейтсона и Г. Ферстера и делает акцент на роли субъекта/наблюдателя, осуществляющего управление [53, 55, 56, 62] (см. рис. В.2.3).

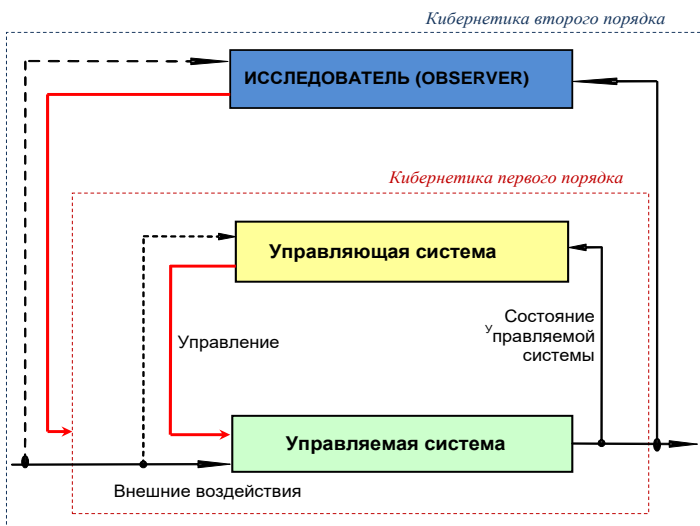


Рис. В.2.3. Кибернетика первого и второго порядка

Необходимо отметить, что, в отличие от винеровской кибернетики, кибернетика второго порядка носит *концептуально-философский характер* (для математика или инженера показательным является то, что соответствующие работы вообще не содержат формальных моделей, алгоритмов и т.п.).

«Биологический» этап кибернетики второго порядка связан с именами У. Матураны и Ф. Варелы [60, 61] и введенным ими понятием *аутопоезиса* (самопорождения и саморазвития систем). Как отмечал Ф. Варела: «Кибернетика первого порядка – это кибернетика наблюдаемых систем. Кибернетика второго порядка – кибернетика наблюдающих систем.» В последней акцент делается на обратной связи между управляемой системой и наблюдателем.

Однако вторым порядком дело не ограничилось – см. рис. В.2.4. Встречаются термины «*кибернетика третьего порядка*» (социальный аутопоезис; кибернетика второго порядка, учитывающая авторефлексию), «*кибернетика четвертого порядка*» (то есть кибернетика третьего порядка, учитывающая ценности исследователя), но эти термины являются концептуальными и еще не получили устоявшихся значений (см., например, обсуждение в [26, 59, 67]).

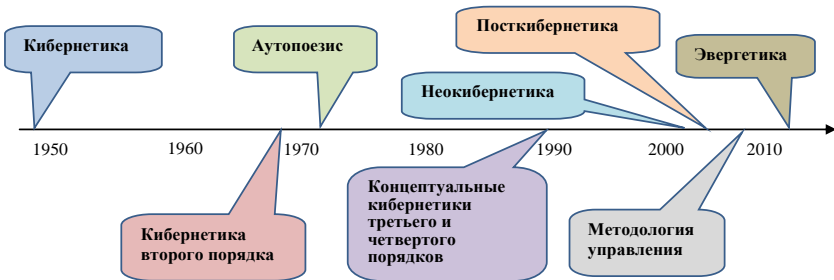


Рис. В.2.4. Онтогенез кибернетики – различные «кибернетики»

Перечислим и другие направления (см. также [32]):

– *гомеостатика* (Ю.М. Горский и его научная школа), исследующая процессы управления противоречиями ради поддержания постоянства процессов, функций, траекторий развития и т.д. [16];

– *неокибернетика* (Б.В. Соколов, Р.М. Юсупов) – междисциплинарная наука, ориентированная на разработку методологии постановки и решения проблем анализа и синтеза интеллектуальных процессов и систем управления сложными объектами произвольной природы [41];

– *неокибернетика* (С.М. Крылов) [24];

– *новая кибернетика, посткибернетика* (Г.С. Теслер) – фундаментальная наука об общих законах и моделях информационного взаимодействия и влияния в процессах и явлениях, протекающих в живой, неживой и искусственной природе [42];

– *эвергетика* (В.А. Виттих) – ценностно-ориентированная наука о процессах управления в обществе, объектом которой является ситуация, осознаваемая как проблемная группой неоднородных акторов, имеющих различные точки зрения, интересы и ценностные предпочтения [14].

Можно предложить понятие «*кибернетики пятого порядка*» [32] как кибернетики четвертого порядка, которая учитывает взаимную рефлексию субъектов управления, принимающих согласованные решения, и т.д.

Еще раз отметим, что все перечисленные «кибернетики» носят концептуальный характер.

Наблюдаемое разнообразие подходов, каждый из которых явно или неявно претендует на новый мейнстрим развития классической кибернетики, вполне естественно, так как отражает ее эволюцию как науки. Со временем часть из подходов разовьется, часть остановится в своем развитии, часть объединится с другими.

4. Законы, закономерности и принципы управления

Одним из основных предметов Кибернетики являются общие законы, закономерности и принципы функционирования сложных систем и управления ими.

Существует иерархия научных *законов и принципов* (см. рис. В.2.5): наиболее общими являются философские законы; более «частными» являются логические и другие общенаучные законы и принципы; далее следуют законы, закономерности и принципы конкретных наук (с одной стороны, теория управления как наука имеет свои законы и принципы, с другой стороны она использует законы и принципы других наук, относящиеся к соответствующей управляемой системе).



Рис. В.2.5. Иерархия законов, закономерностей и принципов

Возникает закономерный вопрос, какие существуют общие законы управления? Общеизвестного ответа на этот вопрос сегодня нет.

Во-первых, следует разделять два устоявшихся значения термина «закон управления». Первое (общее) значение термина «закон» – необходимое, существенное, устойчивое, повторяющееся отношение между явлениями. Второе (узкое) значение: закон управления – зависимость (или класс зависимостей) управляющих воздействий от информации о состоянии управляемой системы, возмущений и целей управления. Такого рода законов известно множество – пропорциональный, пропорционально-интегральный или управление по отклонению, управление по возмущению и другие законы управления (см. предисловие). Но нас интересует первое – общее – значение этого термина.

Во-вторых, казалось бы, многие закономерности, известные в теории управления, не являются законами управления в общем и строгом смысле этого термина. Так, например, закон обратной связи не является универсальным: существует программное

управление и другие виды управлений, не использующие непосредственную информацию о текущих состояниях управляемой системы. Поэтому его скорее следовало бы назвать «принципом обратной связи».

В-третьих, встречающиеся в литературе «законы управления» (наличие цели, обратной связи и т.п.) являются скорее не законами¹, а закономерностями или принципами (см. [32]). Приведем наиболее часто встречающиеся из них.

Общие законы управления (иногда их условно называют закономерностями):

1. *Закон целенаправленности* (у любого управления есть цель).

2. *Закон необходимого разнообразия* (иногда его, следуя У. Эшби [49], называют *принципом адекватности*) – разнообразие² регулятора должно быть адекватно разнообразию объекта³ управления. Эшби считал, что «всякий закон природы есть ограничение разнообразия» [49, с. 183].

3. *Закон эмерджентности* (синергии) – основной закон теории систем – часть больше, чем целое (Аристотель); свойства системы не сводятся к «сумме» свойств ее элементов. У. Эшби формулирует следующее важное свойство сложной системы: «Чем больше система и чем больше различия в размерах между частью и целым, тем выше вероятность того, что свойства целого могут сильно отличаться от свойств частей».

4. *Закон (принцип) внешнего дополнения* сформулирован С. Биром (так называемый «третий принцип кибернетики»): любая система управления нуждается в «черном ящике» – опре-

¹ *Бытует и такое мнение: математика как язык не имеет своих законов (в отличие, например, от естественных наук); так и теория управления как общий язык описания процессов управления не имеет своих законов, пока не конкретизирован класс объектов управления.*

² *Количественная характеристика системы, равная числу ее возможных состояний или логарифму этого числа.*

³ *Закон необходимого разнообразия следовало бы уточнить: разнообразие регулятора должно быть адекватно разнообразию предмета управления, отражающего целевые аспекты объекта управления. Действительно, если управляемой системой является человек, то сложно представить себе «регулятор» с большим разнообразием.*

деленных резервах, с помощью которых компенсируются неучтенные воздействия внешней и внутренней среды (отметим, что эта идея лежит в основе робастного управления).

5. *Закон (принцип) обратной связи* (причинно-следственных связей – см. ниже).

6. *Закон оптимальности* – управление должно быть «наилучшим» с точки зрения достижения цели при имеющихся ограничениях. Как писал Леонард Эйлер: «Бог так устроил Природу, что в ней нет ничего такого, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». Закон оптимальности не означает, что все без исключения реальные системы оптимальны, то есть обладают максимальной эффективностью; он носит скорее нормативный характер для тех, кто проектирует искусственные системы и/или синтезирует законы управления.

Достаточно часто к перечисленным добавляют принципы: причинности, декомпозиции (анализа), агрегирования (синтеза), иерархичности, гомеостаза и др.

Отметим, что, во-первых, многие из приводимых в литературе принципов спорны, так как являются примерами неадаптированного необоснованного переноса и/или «обобщения результатов». Во-вторых, ни у одного из исследователей (!) нет *основания перечисления* предлагаемых им принципов или законов, что свидетельствует об их возможной неуниверсальности, а также о неполноте перечисления, ее слабой обоснованности, возможной внутренней противоречивости и т.д.

В качестве иллюстрации приведем еще несколько наборов принципов/законов управления/функционирования сложных систем.

Принципы функционирования сложных систем [57, с. 60–67]:

1. *Принцип реакции* (The Principle of Reaction) – в качестве реакции на внешнее воздействие в системе усиливаются процессы, направленные на его компенсацию (принцип Ле Шателье – Брауна, заимствованный из физики и химии).

2. *Принцип связности* (The Principle of System Cohesion) – форма системы поддерживается балансом (статическим или динамическим) между связывающими и рассеивающими воз-

действиями. Аналогично поддерживается форма нескольких взаимодействующих систем.

3. *Принцип адаптации* (The Principle of Adaptation) – для устойчивого существования системы средний темп ее адаптации должен равняться среднему темпу изменения окружающей среды или превосходить его.

4. *Принцип связанного разнообразия* (The Principle of Connected Variety) – устойчивость взаимосвязанных систем растет с увеличением разнообразия и степени связанности этого разнообразия с окружающей средой.

5. *Принцип ограниченного разнообразия* (The Principle of Limited Variety) – разнообразие во взаимодействующих системах ограничено имеющимся пространством и минимальной степенью дифференциации.

6. *Принцип предпочитаемой формы* (The Principle of Preferred Pattern) – вероятность того, что взаимодействующие системы окажутся в локально устойчивой конфигурации, растет с увеличением как разнообразия, так и связанности систем.

7. *Принцип цикличности прогресса* (The Principle of Cyclic Progression) – взаимодействующие системы под влиянием внешнего источника энергии будут стремиться к циклическому прогрессу, в котором периодически генерируется и исчезает разнообразие системы.

Большинство известных принципов и законов функционирования сложных систем носит характер именно закономерностей или гипотез. Для иллюстрации этого утверждения перечислим **принципы функционирования биологических и социальных систем** (см. ссылки в [32]), которые также являются предметом Кибернетики.

1. *Принцип наименьшего действия*. Когда в природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным (фактически совпадает с «законом оптимальности», известен и широко используется в физике – конец 18-го – начало 19-го вв.).

2. *Закон устойчивого неравновесия* (Э.С. Бауэр, 1935). Все живые и только живые системы никогда не бывают в равновесии и исполняют за счет свободной энергии постоянную работу против равновесия, требуемого законами физики и химии

при соответствующих внешних условиях (см. также принцип реакции).

3. *Принцип наипростейшей конструкции* (Н. Рашевский, 1943). Та конкретная структура или конструкция живой системы, которую мы действительно находим в природе, является простейшей из возможных структур или конструкций, способных выполнять данную функцию или структуру функций.

4. *Принцип обратной связи* (см. выше) впервые был сформулирован в [2] (см. также *принцип функциональной системы* П.К. Анохина [3]).

5. *Принцип наименьшего взаимодействия* (И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин, 1962). Нервные центры стремятся достичь такой ситуации, при которой афферентация (от латинского *afferentis* – «приносящий», то есть информационные и управляющие потоки и сигналы, передаваемые в центральной нервной системе) будет наименьшей [47].

6. *Принцип вероятностного функционирования мозга* (А.Б. Коган, 1964 [20]). Каждый из нейронов не имеет самостоятельной функции, то есть априори не является ответственным за решение конкретной задачи, распределение которых происходит достаточно случайным образом.

7. *Принцип иерархической организации*, в частности – обработки информации мозгом (Н.А. Бернштейн, Г. Уолтер, У.Р. Эшби [7, 45, 50]). Достижение полной цели равноценно достижению совокупности подцелей.

8. *Принцип адекватности* (У.Р. Эшби [49], Ю.Г. Антомонов [4] и др.). Сложность управляющей системы (динамика ее изменений) должна быть адекватна сложности (скорости изменения) управляемых процессов. Иными словами, «пропускная способность» регулятора устанавливает абсолютный предел управления, как бы ни были велики возможности управляемой системы (см. закон необходимого разнообразия выше).

9. *Принцип вероятностного прогнозирования* при построении действий (Н.А. Бернштейн, 1966 [7]). Мир отражается в форме двух моделей – *модели потребного будущего* (вероятностное прогнозирование на основе предшествующего накопленного опыта) и *модели свершившегося* (однозначно отражает наблюдаемую действительность).

10. *Принцип отбора нужных степеней свободы* (Н.А. Бернштейн, 1966). В начале обучения задействуется большее число степеней свободы обучаемой системы, чем это необходимо для достижения целей обучения [7]. В процессе обучения число «участвующих» переменных уменьшается – «отключаются» несущественные переменные (ср. с явлениями генерализации и концентрации нервных процессов – И.П. Павлов, А.А. Ухтомский, П.В. Симонов и др.).

11. *Принцип необходимости разрушения детерминизма* (Г. Ферстер, Ю.Г. Антомонов [4, 56] и др., 1966). Для достижения качественно нового состояния и повышения уровня организации системы необходимо разрушить (перестроить) существующую, сформированную в предшествующем опыте, детерминированную структуру связей элементов системы.

12. *Принцип естественного отбора* (С.М. Данков, 1953). В системах, ставших эффективными в результате естественного отбора, разнообразие механизмов и пропускная способность каналов передачи информации не будет значительно превышать минимально необходимое для этого значение.

13. *Принцип детерминистского представления* (Ю. Козелецкий, 1979, и др.). При моделировании принятия решений индивидуумом допускается, что его представления о действительности не содержат случайных переменных и неопределенных факторов (последствия принимаемых решений зависят от строго определенных правил) [21].

14. *Принцип дополнительной (несовместимости)* (Н. Бор, 1927; Л.А. Заде, 1973). Высокая точность описания некоторой системы несовместима с ее большой сложностью. Иногда этот принцип понимается более упрощенно: реальная сложность системы и точность ее описания при анализе в первом приближении обратно пропорциональны.

15. *Принцип монотонности* («не упускать достигнутого») У.Р. Эшби, 1952). В процессах обучения, самоорганизации, адаптации и т.д. система в среднем не удаляется от уже достигнутого (текущего) положительного результата (положения равновесия, цели обучения и т.д.) [50].

16. *Принцип естественных технологий* биологических систем (А.М. Уголев, 1967 [44]). *Принцип блочности*: в основе

физиологических функций, а также их эволюции лежит комбинирование универсальных функциональных блоков, реализующих различные элементарные функции и операции.

Следует отметить, что в рамках различных разделов теории управления формулируются отдельные законы и принципы, справедливые в рамках соответствующих предположений. Например, в [46] приведен ряд *законов кибернетической физики*:

- значение любого управляемого инварианта свободной системы можно изменить на произвольную величину при помощи сколь угодно малой обратной связи;
- для управляемой лагранжевой или гамильтоновой системы с малой диссипацией степени ρ уровень энергии, достижимой при помощи управления уровня γ , имеет порядок $(\gamma/\rho)^2$;
- каждая управляемая хаотическая траектория может быть преобразована в периодическую при помощи сколь угодно малого управления.

Принципы организационного управления¹ [33, 34].

Принцип иерархии. Управляющая система имеет, как правило, иерархическую структуру. Она должна соответствовать функциональной структуре управляемой системы и не должна противоречить иерархии смежных (по горизонтали и вертикали) систем. Задачи и ресурсы, обеспечивающие деятельность управляемой системы, должны быть декомпозированы в соответствии со структурой последней.

Принцип унификации. Управляемые и управляющие системы и подсистемы всех уровней должны описываться и рассматриваться в рамках единых принципов (как с точки зрения параметров их моделей, так и с точки зрения критериев

¹ Конечно, идеально было бы потребовать, чтобы все принципы выглядели не как требования к системам управления (о чем говорят обороты «должна», «необходимо, чтобы» и т.д.), которые могут выполняться или не выполняться, а как жесткое требование: если принцип не выполняется, то система неуправляема. Но, к сожалению, таких «жестких» принципов (за исключением допустимости управления), пожалуй, не известно. Да и многие из принципов выглядят обобщением здравого смысла.

эффективности функционирования), не исключая, впрочем, необходимости учета специфики каждой конкретной системы. Большинство реальных управленческих ситуаций может быть сведено к набору так называемых типовых, в которых оптимальны соответствующие *типовые решения*. С другой стороны, управление неизбежно порождает *специализацию* (ограничение разнообразия) как управляющих, так и управляемых субъектов.

Принцип целенаправленности. Любое воздействие управляющей системы на управляемую должно быть целенаправленным.

Принцип эффективности. Управляющая система должна реализовывать наиболее эффективные из допустимых управляющих воздействий.

Принцип ответственности. Управляющая система несет ответственность за принимаемые решения и за эффективность функционирования управляемой системы.

Принцип невмешательства. Вмешательство управляющей системы любого уровня происходит в том и только в том случае, когда непосредственно подчиненные этому уровню управляющие подсистемы не обеспечивают (в настоящее время и/или с учетом прогноза) реализации комплекса необходимых функций.

Принцип развития. Одним из управляющих воздействий является изменение самой системы управления (которое, будучи индуцированным изнутри, может рассматриваться как *саморазвитие*). То же касается и развития управляемой системы.

Принцип прогнозирования. Набор управляющих воздействий должен в заданном диапазоне внешних условий обеспечивать достижение поставленных целей (требование полноты) оптимальным способом с учетом возможных реакций управляемой системы на те или иные управляющие воздействия в прогнозируемых внешних условиях.

Принцип адекватности. Управляющая система (ее структура, сложность, функции и т.д.) должна быть адекватна структуре (соответственно, сложности, функциям и т.д.) управляемой системы. Задачи, которые стоят перед управляемой системой, должны быть адекватны ее возможностям.

Принцип оперативности. При управлении в режиме реального времени характерное время выработки и реализации управленческих решений не должно превышать характерное время изменений управляемой системы (то есть управляющая система должна быть адекватна управляемым процессам в смысле скорости их изменений).

Принцип рациональной централизации. В любой сложной многоуровневой системе существует рациональный уровень централизации управления, полномочий, ответственности, информированности, ресурсов и т.д. Рациональная централизация в частности подразумевает адекватную декомпозицию и агрегирование целей, задач, функций, ресурсов и т.д. Действительно, «фактически всякая сложная система, как возникающая естественно, так и созданная человеком, может считаться организованной, только если она основана на некоей иерархии или переплетении нескольких иерархий. Во всяком случае, до сих пор мы не знаем организованных систем, устроенных иначе» [43, с. 39].

Принцип согласованности. Управляющие воздействия в рамках существующих ограничений должны быть максимально согласованы с интересами и предпочтениями управляемых субъектов.

Принцип этичности. При принятии управленческих решений учет существующих в обществе, организации и т.д. этических норм имеет приоритет перед другими критериями.

Отметим, что перечисленные принципы организационного управления в большинстве своем универсальны для систем любой природы (исключение составляют, пожалуй, принципы ответственности, развития, согласованности и этичности, которые вряд ли имеют смысл в системах автоматического управления).

Таким образом, общие законы и принципы управления – это предмет Кибернетики, их список далеко не канонизирован, и его пополнение и систематизация – одна из основных задач развития этой науки.

5. Кибернетика 2.0

Итак, выше кратко рассмотрены история кибернетики и ее современное состояние. А как обстоит дело с ее перспективами? Для этого обратимся к первоисточкам – исходному определению кибернетики как науки об управлении и связи.

С управлением все относительно понятно, со связью, на первый взгляд, тоже: в 40-е годы появилась (в том числе усилиями самого Н. Винера) математическая теория связи и информации – модели определения количества информации, пропускных способностей каналов связи, затем интенсивно начала развиваться теория кодирования и т.д.

Но посмотрим на термин «связь» немного шире. У Н. Винера и в статье [64], и в пионерской книге [12] в явном или неявном виде фигурируют *целесообразность* и *каузальность* (*причинно-следственные связи*: действительно, для осуществления обратной связи управление-следствие определяется причиной – состоянием управляемой системы; управляющее воздействие на входе управляемой системы вызвано причиной – состоянием управляющей системы и т.д.). Конечно, важно, по каким каналам связи и как именно передается информация, но все это вторично, если речь идет о закономерностях, универсальных для животного, машины и общества.

Еще более широкий взгляд – трактовка «связи» как *взаимосвязи* между элементами управляемой системы, между управляющей и управляемой системой и т.д., включая различные виды воздействий и взаимодействий (материальных, информационных и пр.). При этом «взаимосвязь» является по отношению к «связи» более общей категорией.

Взаимосвязям (в общесистемном виде) соответствует категория *организации* (см. определение и обсуждение ниже). Поэтому если сделать простую коррекцию – заменить в винеровском определении кибернетики «связь» на «организацию», то получим более общее и современное определение кибернетики: «наука об организации систем и управлении ими», которая условно называется «*кибернетикой 2.0*» [32].

Организация. В соответствии с определением, данным в Философском энциклопедическом словаре, организация (см. рис. В.2.6):

1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением (организация как свойство);

2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого (организация как процесс);

3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил (организация как *организационная система* [34]).

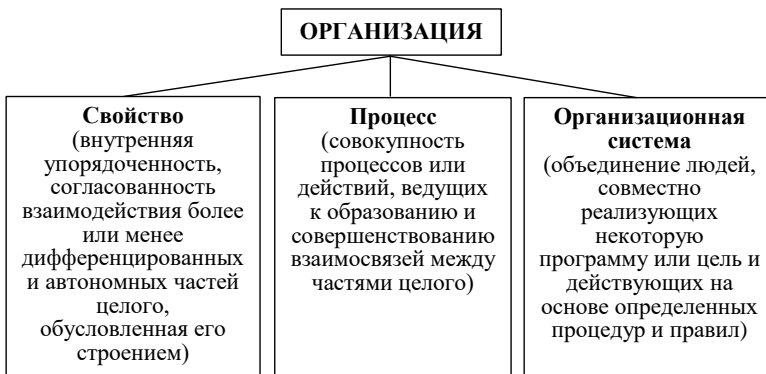


Рис. В.2.6. Определение «организации»

На дескриптивном (феноменологическом) и объяснительном уровне «организация системы» отражает, соответственно, **как** и **почему именно так** организована система (организация как *свойство*); на нормативном уровне – как она **должна** быть организована (требования к свойству организации) и как ее **следует** организовывать (требования к процессу организации).

Научное направление, которое призвано исследовать ответы на поставленные вопросы (его логично называть *теория организации*, или условно O^3 – организация как свойство, про-

цесс и система), на сегодняшний день почти не развито (хотя его истоки относятся к началу XX века – *тектологии* А.А. Богданова [11]), хотя понятно, что оно тесно связано и отчасти пересекается с общей теорией систем и системным анализом (они занимаются в основном проблемами дескриптивного уровня, почти не обращаясь к нормативному) а также с *методологией* (как учением об организации деятельности [6, 33]). Создание полноценной теории организации является актуальной задачей Кибернетики!

Организация и управление. Рассмотрим, как соотносятся две базовых категории «организация» и «управление», фигурирующие в определении кибернетики 2.0. В монографии [6] вводится и исследуется понятие «*комплексная деятельность*» (КД) – деятельность (целенаправленная активность человека), обладающая нетривиальной внутренней структурой, с множественными и/или изменяющимися субъектом, технологией, ролью предмета деятельности в его целевом контексте. Кроме того, в [6] рассматриваются структурные элементы КД, конструктивно описываются ее логическая, причинно-следственная и процессная структуры.

В [34, с. 11] управление определено как «воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения». В [6] предложена следующая модификация этого определения: «управление – комплексная деятельность, обеспечивающая воздействие управляющего субъекта (субъекта этой КД) на управляемую систему, призванное обеспечить ее поведение, приводящее к достижению целей управляющего субъекта». Напомним, что под *поведением* системы в общем случае понимается последовательное (во времени) хотя бы частично наблюдаемое, поддающееся измерению, объективной фиксации изменение ее состояний.

Таким образом, автоматизированное и организационное управление являются частными случаями деятельности (как и в рамках методологии управления, управление – частный случай практической деятельности [33]).

Приведенное выше определение организации позволило в [6] предложить следующую его модификацию: *организация* – это комплексная деятельность с целью создания внутренней

упорядоченности, согласованности взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных элементов предмета этой деятельности (в том числе за счет образования и поддержания между этими элементами взаимосвязей с заданными характеристиками).

Таким образом, и управление, и организация являются деятельностью, а результат этой деятельности – воздействие на управляемую/организуемую систему – можно считать соответственно управлением и организацией в узком смысле.

В [6] предложено рассматривать соотношение между организацией и управлением, представленное на рис. В.2.7: компонентами управления являются организация, регулирование и оценивание; компонентами организации – анализ, синтез и конкретизация (см. также рис. В.1.3).

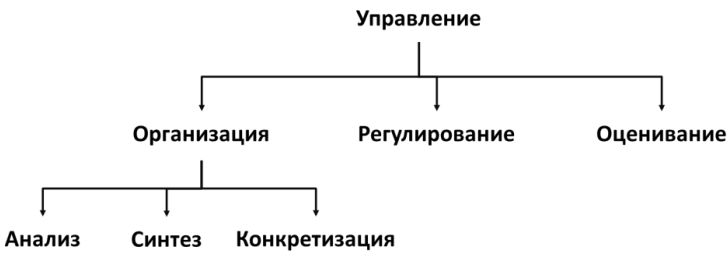


Рис. В.2.7. Структура управления и организации

Успешное сочетание (в рамках кибернетики 2.0) организации и управления позволяет обоснованно и эффективно отвечать на главный вопрос инженерии деятельности о том, как строить системы управления ими («рефлексивный» вопрос, относящийся к кибернетике второго или более высоких порядков): человечеству необходимо научиться проектировать и реализовывать системы управления сложными объектами (высокотехнологичным производством, жизненным циклом систем, корпорациями, регионами и т.д.) так же быстро, эффективно и унифицированно, как уже научились в инженерии проектировать материальные объекты (технические и другие подобные им системы).

Управление и менеджмент. Говоря о взаимосвязи теории *управления* (в англоязычной литературе в задачах автоматического или автоматизированного управления применяется термин «Control») с другими науками, нельзя не сказать о ее соотношении с *менеджментом* (в англоязычной литературе в математических задачах организационного управления применяется термин «Control», а при качественном рассмотрении организационного управления – термин «Management»).

Любая наука детерминируется своими предметом и методами исследования. Предметом исследований науки об управлении является управление системами самой разной природы – техническими, экономическими, социальными, биологическими и др. Предметом исследований менеджмента является управление организациями (*организационными системами*). Что касается методов, то менеджмент как наука опирается в основном на описательные методы, в то время как наука об управлении в целом использует и эмпирические, и теоретические методы. Так как менеджмент имеет более узкий предмет исследований и использует более ограниченный набор методов исследования, то он является разделом науки об управлении.

Утверждение о «вложенности» менеджмента как науки в широко трактуемую теорию управления наверняка вызовет возражения как специалистов по менеджменту (что вполне естественно, так как представителю любой науки свойственно гиперболизировать ее возможности и место в системе наук), так и ученых-гуманитариев, занимающихся философией управления.

Некоторым оправданием может служить следующее. Под термином «наука об управлении» (или иногда не очень корректно – «теория управления») зачастую неоправданно узко понимают формальную (математическую) теорию управления (наука об управлении включает в себя множество таких теорий). Боязнь же некоторых гуманитариев математики настолько велика, что многие специалисты по менеджменту постулируют принципиальную невозможность использовать математические методы для их предмета исследований (в силу сложности, многосторонности и т.п. последнего).

Это приводит к ошибочному противопоставлению менеджмента и математических теорий управления. На самом деле они должны дополнять друг друга. В организационном управлении можно выделить четыре уровня абстракции/конкретности рассмотрения управленческой деятельности [33]:

1) *концептуальный уровень* (использующий максимально общие категории и не претендующий на операциональность управленческой деятельности, тем более в конкретных условиях);

2) *уровень анализа* (декомпозирующий и детализирующий описание деятельности управляемых субъектов, позволяющий обнаруживать общесистемные закономерности их функционирования);

3) *уровень синтеза* (агрегирующий и конкретизирующий описание деятельности управляемых субъектов, позволяющий находить наиболее эффективные закономерности их функционирования);

4) *уровень реализации* (максимально конкретный, операциональный, учитывающий все существенные аспекты как управленческой деятельности, так и деятельности управляемых субъектов в конкретных условиях).

Традиционно менеджмент уделял и уделяет основное внимание самым верхним и самым нижним уровням приведенной иерархии (соответственно, концептуальному уровню и уровню реализации – см. таблицу В.2.1). Математические теории управления, наоборот, исследовали в основном модели реакций управляемой системы на те или иные управляющие воздействия и решали задачи синтеза оптимальных управляющих воздействий, что соответствует средним двум уровням.

Поэтому на сегодняшний день задача состоит в том, чтобы дополнить менеджмент средними уровнями (анализ и синтез), а математические теории организационного управления – верхним (концептуальным) и нижним (реализации) уровнями. Другими словами, в менеджменте остро ощущается необходимость перехода от несистематизированного и подавляющего своим объемом набора лучших практик к комплексу инструментов управления с четкими условиями и эффективностью применения.

Таблица В.2.1. Менеджмент и математические теории управления

Уровень абстракции / конкретности	Содержание управленческой деятельности	Что нужно знать для принятия эффективных управленческих решений	Менеджмент	Математические теории управления
Концептуальный	Выбор общих методов, видов, форм и т.д. управления	Терминологию, лучшие практики		
Анализа	Анализ управляемой системы	Модель управляемой системы (ее реакции на управляющие воздействия)		
Синтеза	Синтез оптимального управления, включая выбор частных методов, видов, форм и т.д. управления	Решение математической задачи синтеза и/или результаты имитационного / сценарного моделирования		
Реализации	Реализация управленческих воздействий	Типовые схемы реализации процедур управления, лучшие практики		

Кибернетика 2.0. Кибернетика 2.0 выше была определена как наука об (общих закономерностях) организации систем и управления ими.

Тесная связь кибернетики с общей теорией систем и системным анализом, а также всё возрастающая роль технологий позволяют предположить, что кибернетика 2.0 должна в частности включать в себя *кибернетику* (как винеровскую, так и кибернетики более высокого порядка), *Кибернетику*, а также *общую теорию систем* и *системный анализ* с результатами в следующих формах:

- общие законы, закономерности и принципы, исследуемые в рамках метанаук – *Кибернетика* и *системный анализ*;
- совокупность результатов наук-компонентов («зонтичные бренды» – *кибернетика* и *системные исследования*, объединяющие соответствующие науки);

– принципы разработки соответствующих технологий.

Для кибернетики 2.0 можно выделить, как и для кибернетики выше, *концептуальное ядро*, которое по аналогии назовем Кибернетикой 2.0 с большой буквы. На концептуальном уровне Кибернетику 2.0 составляют [32]: философия управления (включая общие законы, закономерности и принципы управления), методология управления [33], теория организации (включая общие законы, закономерности и принципы функционирования сложных систем, а также разработки и выбора общих технологий [6]) – см. рис. В.2.8.

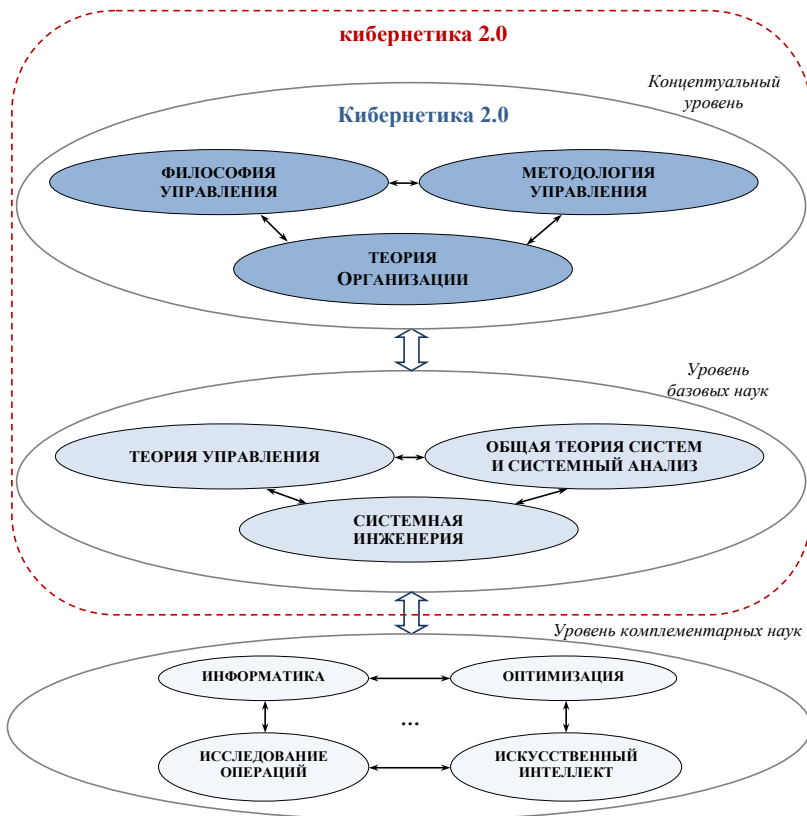


Рис. В.2.8. Состав и структура кибернетики 2.0

Базовыми науками для кибернетики 2.0 являются теория управления, общая теория систем и системный анализ [8, 30, 37], а также системная инженерия [58]. *Комплементарными науками* для кибернетики 2.0 являются информатика, оптимизация, исследование операций [65, 68] и искусственный интеллект – см. рис. В.2.8.

Отметим, что представленная на рис. В.2.8 *общая архитектура кибернетики 2.0* может проецироваться на различные предметные области и отрасли наук в зависимости от класса рассматриваемых систем (технические, биологические, социальные и т.д.).

Развитие кибернетики 2.0 в условиях усиливающейся дифференциации наук дает:

– ученым, специализирующимся собственно на кибернетике и/или на теории управления, и ученым – представителям смежных наук: общую картину обширной предметной области (и общий язык ее описания), возможность позиционирования своих результатов и их продвижения в новых теоретических и прикладных областях;

– потенциальным потребителям прикладных результатов со стороны власти и бизнеса: во-первых, уверенность в единстве позиций¹ профильных исследователей; во-вторых, наличие новых фундаментальных и основывающихся на них прикладных результатов дает возможность более эффективно решать задачи управления самыми разнообразными классами объектов.

Можно выделить (см. также [32]) ряд глобальных *вызовов* (то есть явлений, которые уже наблюдаются, но не укладываются полностью в рамки кибернетики 1.0), на которые должна ответить кибернетика 2.0:

1) *вавилонская башня науки* (междисциплинарность, дифференциация наук; в первую очередь, в контексте кибернетики – наук об управлении и смежных с ними);

2) *крах централизации* (децентрализация и «сетевизм», включая системы систем, распределенную оптимизацию, эмерджентный интеллект, мультиагентные системы и т.д.);

¹ *Разнообразие и противоречивость мнений и подходов специалистов/подчиненных всегда смущает заказчика/руководителя.*

3) *стратегическое поведение* (во всех его проявлениях, включая несогласованность интересов, целеполагание, рефлексию и т.д.);

4) *проклятие сложности* (включая все аспекты сложности и нелинейности современных систем, а также «проклятие размерности» – большие данные и большое управление).

Ряд этих вызовов (и возможные ответы на них) более подробно рассматривается в последующих разделах настоящей книги.

Литература

- 1 АКОФФ Р. ЭМЕРИ М. *О целеустремленных системах*. – М.: Советское радио, 1974. – 272 с.
- 2 АНОХИН П.К. *Проблема центра и периферии в современной физиологии нервной деятельности* // В кн.: Проблема центра и периферии в нервной деятельности. – Горький: 1935. – С. 9–70.
- 3 АНОХИН П.К. *Теория функциональной системы, как предпосылка к построению физиологической кибернетики / Биологические аспекты кибернетики*. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 74–91.
- 4 АНТОМОНОВ Ю.Г. *Моделирование биологических систем. Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1977. – 259 с.
- 5 АРБИБ М. *Метафорический мозг*. – М.: Мир, 1976. – 296 с.
- 6 БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Методология комплексной деятельности*. – М.: Ленанд, 2018. – 320 с.
- 7 БЕРНШТЕЙН Н.А. *Очерки по физиологии движений и физиологии активности*. – М.: Медицина, 1966. – 347 с.
- 8 БЕРТАЛАНФИ Л. *Общая теория систем – критический обзор / Исследования по общей теории систем*. – М.: Прогресс, 1969. – С. 23–82.
- 9 БИР С. *Кибернетика и управление производством*. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
- 10 БИР С. *Мозг фирмы*. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
- 11 БОГДАНОВ А.А. *Всеобщая организационная наука*. – М.: Экономика, 1989. – Т. 1. – 304 с.; Т 2. – 351 с.

- 12 ВИНЕР Н. *Кибернетика или управление и связь в животном и машине*. – М.: Наука, 1983. – 338 с.
- 13 ВИНЕР Н. *Кибернетика и общество*. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 200 с.
- 14 ВИТГИХ В.А. *Проблемы эвергетики // Проблемы управления*. – 2014. – №4. – С. 69–71.
- 15 ГЛУШКОВ В.М. *Введение в кибернетику*. – Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1964. – 324 с.
- 16 ГОРСКИЙ Ю.М., СТЕПАНОВ А.М., ТЕСЛИНОВ А.Г. *Гомеостатика. Гармония в игре противоречий*. – Иркутск: Репроцентр А1, 2008. – 634 с.
- 17 ДЖОРДЖ Ф. *Мозг как вычислительная машина*. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 528 с.
- 18 ДЖОРДЖ Ф. *Основы кибернетики*. – М.: Радио и связь, 1984. – 272 с.
- 19 КОБРИНСКИЙ Н.Е., МАЙМИНАС Е.З., СМЕРНОВ А.Д. *Экономическая кибернетика*. – М.: Экономика, 1982. – 408 с.
- 20 КОГАН А.Б., НАУМОВ Н.П., РЕЖАБЕК В.Г., ЧОРАЯН О.Г. *Биологическая кибернетика*. – М.: Высшая школа, 1972. – 384 с.
- 21 КОЗЕЛЕЦКИЙ Ю. *Психологическая теория решений*. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
- 22 КОРШУНОВ Ю.М. *Математические основы кибернетики*. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
- 23 КРЫЛОВ В.Ю., МОРОЗОВ Ю.И. *Кибернетические модели и психология*. – М.: Наука, 1984. – 174 с.
- 24 КРЫЛОВ С.М. *Неокибернетика: Алгоритмы, математика эволюции и технологии будущего*. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 288 с.
- 25 КУЗИН Л.Т. *Основы кибернетики*. – М.: Энергия, 1979. – Т. 1. – 504 с.; Т. 2. – 584 с.
- 26 ЛЕПСКИЙ В.Е. *Эволюция представлений об управлении (методологический и философский анализ)*. – М.: Когито-Центр, 2015. – 107 с.
- 27 ЛЕРНЕР А.Я. *Начала кибернетики*. – М.: Наука, 1967. – 400 с.

- 28 ЛЯПУНОВ А.А. *Проблемы теоретической и прикладной кибернетики*. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
- 29 МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем*. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
- 30 МЕСАРОВИЧ М., ТАКАХАРА Я. *Общая теория систем: математические основы*. – М.: Мир, 1978. – 312 с.
- 31 МЭНЕСКУ М. *Экономическая кибернетика*. – М.: Экономика, 1986. – 229 с.
- 32 НОВИКОВ Д.А. *Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития*. – М.: Ленанд, 2016. – 160 с.
- 33 НОВИКОВ Д.А. *Методология управления*. – М.: Либроком, 2011. – 128 с.
- 34 НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – Физматлит, 2012. – 604 с.
- 35 НОВОСЕЛЬЦЕВ В.Н. *Теория управления и биосистемы*. – М.: Наука, 1978. – 319 с.
- 36 ПАРИН В.В., БАЕВСКИЙ Р.М. *Введение в медицинскую кибернетику*. – М.: Медицина, 1966. – 300 с.
- 37 ПЕРЕГУДОВ Ф.И., ТАРАСЕНКО Ф.П. *Введение в системный анализ*. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
- 38 ПОВАРОВ Г.Н. *Ампер и кибернетика*. – М.: Сов. радио, 1977. – 96 с.
- 39 ПРАНГИШВИЛИ И.В. *Системный подход и общесистемные закономерности*. – М.: СИНТЕГ, 2000. – 528 с.
- 40 РЕДЬКО В.Г. *Эволюционная кибернетика*. – М.: Наука, 2003. – 156 с.
- 41 СОКОЛОВ Б.В., ЮСУПОВ Р.М. *Анализ междисциплинарного взаимодействия современной информатики и кибернетики: теоретические и практические аспекты // Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014)*. – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 8625–8636.
- 42 ТЕСЛЕР Г.С. *Новая кибернетика*. – Киев: Логос, 2004. – 404 с.
- 43 ТУРЧИН В.Ф. *Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции*. – М.: Наука, 1993. – 296 с.
- 44 УГОЛЕВ А.М. *Естественные технологии живых систем*. – Л.: Наука, 1987. – 317 с.

- 45 УОЛТЕР Г. *Живой мозг*. – М.: Мир, 1970. – 300 с.
- 46 ФРАДКОВ А.Л. *Кибернетическая физика*. – СПб.: Наука, 2004. – 208 с.
- 47 ЦЕТЛИН М.Л. *Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем*. – М.: Наука, 1969. – 316 с.
- 48 ШТЕЙНБУХ К. *Автомат и человек*. – М.: Сов. радио, 1967. – 494 с.
- 49 ЭШБИ У.Р. *Введение в кибернетику*. – М.: Мир, 1966. – 432 с.
- 50 ЭШБИ У.Р. *Конструкция мозга*. – М.: ИЛ, 1962. – 399 с.
- 51 ЯНГ С. *Системное управление организацией*. – М.: Сов. радио, 1970. – 456 с.
- 52 AMPÈRE A.-M. *Essai sur la philosophie des sciences*. – Paris: Chez Bachelier, 1843. – P. 140–142.
- 53 BATESON G. *Steps to an Ecology of Mind*. – San Francisco: Chandler Pub. Co., 1972. – 542 p.
- 54 BERTALANFFY L. *General System Theory: Foundations, Development, Applications*. – New York: George Braziller, 1968. – 296 p.
- 55 FOERSTER H. *The Cybernetics of Cybernetics*. – Minneapolis: Future Systems, 1995. – 228 p.
- 56 FOERSTER H. *Understanding Understanding: Essays on Cybernetics and Cognition*. – New York: Springer-Verlag, 2003. – 362 p.
- 57 HITCHINS D. *Putting Systems to Work*. – New York: Wiley, 1993. – 342 p.
- 58 INCOSE *Systems Engineering Handbook Version 3.2.2 – A Guide for Life Cycle Processes and Activities* / Ed. by C. Haskins. – San Diego: INCOSE, 2012. – 376 p.
- 59 KENNY V. *There's Nothing Like the Real Thing. Revisiting the Need for a Third-Order Cybernetics* // *Constructivist Foundations*. – 2009. – No. 4(2). – P. 100–111.
- 60 MATURANA H., VARELA F. *Autopoiesis and Cognition*. – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1980. – 143 p.
- 61 MATURANA H., VARELA F. *The Tree of Knowledge*. – Boston: Shambhala Publications, 1987. – 231 p.

- 62 MEAD M. *The Cybernetics of Cybernetics* // In: Purposive Systems / Ed. by H. von Foerster et al. – New York: Spartan Books, 1968. – P. 1 – 11.
- 63 PICKERING A. *The Cybernetic Brain*. – Chicago: The University of Chicago Press, 2010. – 537 p.
- 64 ROSENBLUETH A., WIENER N., BIGELOW J. *Behavior, Purpose and Teleology* // Philosophy of Science. – 1943. – No. 10. – P. 18–24.
- 65 TAHA H. *Operations Research: An Introduction*. – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
- 66 TRENTOWSKI B. *Stosunek Filozofii do Cybernetyki, Czyli Sztuki Rządzenia Narodem*. – Warszawa, 1843. – 195 p.
- 67 UMPLEBY S. *A Brief History of Cybernetics in the United States* // Austrian Journal of Contemporary History. – 2008. – Vol. 19, No. 4. – P. 28–40.
- 68 WAGNER H. *Principles of Operations Research*. – NJ Upper Saddle River: Prentice Hall, 1975. – 1039 p.

ГЛАВА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

1.1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рубинович Е.Я.¹

1. Введение

В разделе описаны динамические системы, эволюция вектора состояния которых в дискретном времени зависит от воздействия *случайных факторов*. Следует подчеркнуть, что случайность принципиально присутствует в окружающем нас мире, поскольку она характеризует отклонения от закономерности, порождаемые множеством неучтенных связей в данном явлении. Кроме того, случайность может намеренно вводиться, например, в процесс взаимодействия конфликтующих динамических объектов с целью создания дополнительных факторов неопределенности для противоборствующей стороны. Успешный учет случайных факторов, включающий, в частности, борьбу с *помехами* (шумами), естественной или искусственной *неопределенностью*, напрямую зависит от создания адекватных математических моделей исследуемого явления, а также алгоритмов сбора и обработки априорной и текущей информации, поступающей от разного рода датчиков по каналам связи в центр принятия решений.

Часто процедура обработки собираемой информации заключается в «отстройке от шумов», то есть выделении (*оценивании*) полезного сигнала на фоне шума. Такие процедуры называются *фильтрацией*. В случаях когда процесс сбора информации допускает управление, говорят об *управлении наблюдениями*. Оптимизация этого процесса позволяет собирать более «качественную» информацию для дальнейшей обработки (фильтрации).

Актуальность разработки алгоритмов управления наблюдениями обусловлена, в частности, всевозрастающим интересом

¹ Евгений Яковлевич Рубинович, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., профессор (rubinvch@ipu.ru).

к использованию беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) и других мобильных робототехнических систем в различных сферах жизнедеятельности человека (наука, геологоразведка, картографирование, охрана границ и территорий, мониторинг территорий для профилактики стихийных бедствий и борьбы с ними и т.п.). Как показывает практика, точность оценки *элементов движения мобильной цели* (ЭДЦ), например, быстроходного катера на гладкой водной поверхности или танкетки на пересеченной оврагами и балками части суши, с борта БПЛА по угломерной информации о цели (*азимутальный угол* – в горизонтальной плоскости и *угол возвышения* – в вертикальной) существенно зависит от собственно траектории БПЛА. Оптимизация пространственного маневра БПЛА позволяет существенно (в разы!) снизить среднеквадратические ошибки оценивания. Управление наблюдениями, осуществляемое путем выбора рациональной траектории движения наблюдателя, называется *траекторным*. Следует заметить, что управление наблюдениями дает значительный выигрыш, в смысле повышения точности оценивания, при «скудной» информации об объекте наблюдения (малое число каналов наблюдений, большие помехи в каналах передачи информации и т.п.). Чем «скуднее» информация, тем значительнее роль управления наблюдениями в улучшении точности оценивания ЭДЦ.

В качестве базовой модели управляемой стохастической системы ниже будет рассмотрена линейно-квадратичная задача *стохастического управления* динамическим объектом по неполным данным с борта подвижного нелинейного наблюдателя при наличии гауссовских возмущений в динамике объекта и при гауссовских шумах в уравнении наблюдений. В этом примере управление наблюдениями осуществляется траекторно. Отметим, что гауссовское приближение случайных возмущений и помех является лишь удобной математической формализацией. В частности, относительная дистанция между объектом и наблюдателем не может в принципе быть отрицательной, в отличие от возможной реализации (любой!) гауссовской случайной величины. Тем

не менее гауссовское приближение оказывается вполне приемлемым для инженерных приложений, поскольку нереальные, с точки зрения здравого смысла, реализации случайных гауссовских величин в рассматриваемой модели могут осуществляться лишь с ничтожно малой вероятностью.

Для понимания материала данного раздела необходимо знакомство с основами элементарной теории вероятности. В частности, надо иметь представление о случайной величине, ее функции распределения и плотности вероятности, характеристической функции, математическом ожидании и дисперсии. Все векторы в данном разделе считаются вектор-столбцами.

При написании этого раздела использовались основные источники [1, 2]. Некоторые специальные вопросы отражены в работах [3–12], на них в тексте даются соответствующие ссылки. Книга [4] может быть рекомендована для более глубокого изучения затронутых в разделе проблем.

Структура изложения материала раздела следующая. В подразделе 2 рассматриваются гауссовские случайные векторы и их свойства; подраздел 3 посвящен определению и перечислению свойств псевдообратных матриц; в подразделе 4 приводится теорема о нормальной корреляции (одна из основных теорем в теории линейной фильтрации); в подразделе 5 идет речь об оптимальном в среднеквадратическом смысле оценивании случайных векторов; подраздел 6 посвящен гауссовско-марковским случайным последовательностям; в подразделе 7 приводятся уравнения условно-гауссовской фильтрации, обобщающие фильтр Калмана; в подразделе 8 рассматриваются вопросы траекторного управления наблюдениями за мобильным объектом с борта подвижного наблюдателя; в подразделе 9 приводятся некоторые вспомогательные для решения задач стохастического управления результаты; в подразделе 10 дается постановка и решение линейно-квадратичной задачи управления и наблюдения по неполным данным; в подразделе 11 приводится пример задачи траекторного управления наблюдениями; в подразделе 12 демонстрируются робастные свойства линейных фильтров.

2. Гауссовские векторы

Определение 1. Случайный вектор $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ со значениями в \mathbb{R}^n называется *гауссовским*, если его характеристическая функция

$$\varphi_\theta(z) = E \exp(i \langle z, \theta \rangle),$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\langle z, \theta \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \theta_j$, задается формулой

$$(1) \quad \varphi_\theta(z) = \exp(i \langle z, m \rangle - \frac{1}{2} \langle z, Rz \rangle).$$

Здесь $m = (m_1, \dots, m_n)$, а $R = \|R_{ij}\|$ – неотрицательно определенная симметрическая матрица порядка $(n \times n)$.

Параметры m и R характеристической функции гауссовского вектора имеют простой смысл. Вектор m есть *вектор средних значений*, $m = E\theta$, а R есть *матрица ковариации*

$$R = \text{Cov}(\theta, \theta) = E[(\theta - m)(\theta - m)^T].$$

Сформулируем ряд свойств гауссовских векторов, которыми мы будем неоднократно пользоваться.

1. Если $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ – гауссовский вектор, $A_{(m \times n)}$ и $a = (a_1, \dots, a_n)$ – детерминированные матрица и вектор, то случайный вектор

$$\xi = A\theta + a$$

имеет характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(z) &= E \exp(i \langle z, \xi \rangle) = \\ &= E \exp(i \langle z, a \rangle) \exp\left(i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m z_j A_{jk}\right) \theta_k\right) = \\ &= \exp\left(i \langle z, Am + a \rangle - \frac{1}{2} \langle z, ARA^T z \rangle\right) \end{aligned}$$

и, следовательно, является гауссовским с параметрами

$$E\xi = Am + a, \quad \text{Cov}(\xi, \xi) = A \text{Cov}(\theta, \theta) A^T.$$

2. Пусть $(\theta, \xi) = [(\theta_1, \dots, \theta_k), (\xi_1, \dots, \xi_l)]$ – гауссовский вектор с

$$(2) \quad \begin{cases} m_\theta = E\theta, \quad m_\xi = E\xi, \\ D_{\theta\theta} = \text{Cov}(\theta, \theta) = E[(\theta - m_\theta)(\theta - m_\theta)^T], \\ D_{\xi\xi} = \text{Cov}(\xi, \xi) = E[(\xi - m_\xi)(\xi - m_\xi)^T], \\ D_{\theta\xi} = \text{Cov}(\theta, \xi) = E[(\theta - m_\theta)(\xi - m_\xi)^T]. \end{cases}$$

Если векторы θ и ξ некоррелированы, то есть $D_{\theta\xi} = 0$, то они и независимы.

Действительно, непосредственно показывается, что совместная характеристическая функция представима в виде

$$\varphi_{(\theta, \xi)}(z_1, z_2) = E \exp \left(i \langle (z_1, z_2), (\theta, \xi) \rangle \right) = \varphi_{\theta}(z_1) \varphi_{\xi}(z_2),$$

откуда и следует независимость векторов.

3. Пусть $\{\theta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность гауссовских векторов, сходящаяся в среднеквадратическом к вектору θ , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\theta - \theta_n)^T (\theta - \theta_n)] = 0.$$

Тогда θ – также гауссовский вектор.

Для доказательства заметим, что из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость моментов $m_n = E\theta_n$, $R_n = \text{Cov}(\theta_n, \theta_n)$ к моментам $m = E\theta$, $R = \text{Cov}(\theta, \theta)$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \exp \left(i \langle z, m \rangle - \frac{1}{2} \langle z, Rz \rangle \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(i \langle z, m_n \rangle - \frac{1}{2} \langle z, R_n z \rangle \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \exp \left(i \langle z, \theta_n \rangle \right) = E \exp \left(i \langle z, \theta \rangle \right). \end{aligned}$$

4. В случае невырожденности матрицы ковариаций $R = \text{Cov}(\theta, \theta)$ у распределения случайного вектора θ с характеристической функцией (1) существует плотность

$$p_{\theta}(z) = \left((2\pi)^n |R| \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle R^{-1}(z - m), (z - m) \rangle \right),$$

где $|R| = \det R$. При $|R| = 0$ плотности не существует. Такое распределение случайного вектора θ называют *несобственным гауссовским распределением*.

Как следует из 1–3, гауссовские векторы обладают некоторыми важными свойствами независимо от того, вырождена матрица R или нет. Поэтому при решении, в частности, задач оценивания гауссовских случайных векторов было бы неестественно ограничиваться лишь случаями, когда существует плотность распределения. Однако этот более общий подход требует использования так называемой псевдообратной матрицы [1, 2].

3. Псевдообратная матрица

Рассмотрим матричное уравнение

$$(3) \quad AXA = A.$$

Если A – квадратная невырожденная матрица, то это уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}$. Если же матрица A вырожденная или даже прямоугольная, то решение уравнения (3), если оно существует, нельзя определить однозначно. Тем не менее существует и (в определенном классе матриц) единственная матрица, удовлетворяющая (3). Эта матрица далее будет обозначаться A^+ и называться псевдообратной.

Определение 2. Матрица $A_{(n \times m)}^+$ называется псевдообратной к матрице $A_{(m \times n)}$, если выполняются следующие два условия:

$$(4) \quad AA^+A = A,$$

$$(5) \quad A^+ = UA^T = A^TV,$$

где U и V – некоторые матрицы.

Из условия (5) следует, что строки и столбцы матрицы A^+ являются линейными комбинациями соответственно строк и столбцов матрицы A . Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. [1, 2]. Матрица A^+ , удовлетворяющая (4) и (5), существует и единственна.

Перечисленные ниже свойства псевдообратных матриц легко выводятся из определения [1, 2].

- 1) $AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+.$
- 2) $(A^T)^+ = (A^+)^T.$
- 3) $(A^+)^+ = A.$
- 4) $(A^+A)^2 = A^+A, \quad (A^+A)^T = A^+A,$
 $(AA^+)^2 = AA^+, \quad (AA^+)^T = AA^+.$
- 5) $(A^TA)^+ = A^+(A^T)^+ = A^+(A^+)^T.$
- 6) $A^+ = (A^TA)^+A = A^T(AA^T)^+.$
- 7) $A^+AA^T = A^TAA^+ = A^T.$

8) Если S – ортогональная матрица, то $(SAS^T)^+ = SA^+S^T$.

9) Если $A_{(n \times n)}$ – симметрическая неотрицательно определенная матрица ранга $r < n$, то

$$(6) \quad A^+ = T^T(TT^T)^{-2}T,$$

где матрица $T_{(n \times r)}$ ранга r определяется из разложения

$$(7) \quad A = T^T T.$$

10) Если матрица A невырожденная, то $A^+ = A^{-1}$.

4. Теорема о нормальной корреляции

Сформулируем, с использованием свойств псевдообратных матриц, еще одно свойство гауссовского случайного вектора.

Лемма 2. [1, 2]. Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ – гауссовский случайный вектор с параметрами $m = E\theta$, $R = Cov(\theta, \theta)$. Тогда найдется гауссовский вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ с независимыми компонентами, $E\varepsilon = 0$, $Cov(\varepsilon, \varepsilon) = I_{(n \times n)}$ такой, что с вероятностью «единица»

$$\theta = R^{1/2}\varepsilon + m.$$

Здесь $I_{(n \times n)}$ – единичная матрица размера $(n \times n)$.

Теорема 1 (О нормальной корреляции). [1, 2]. Пусть $(\theta, \xi) = ([\theta_1, \dots, \theta_k], [\xi_1, \dots, \xi_l])$ – гауссовский вектор с параметрами (2). Тогда условное математическое ожидание $E(\theta/\xi)$ и условная ковариация $Cov(\theta, \theta/\xi) = E\{[\theta - E(\theta/\xi)][\theta - E(\theta/\xi)]^T / \xi\}$ задаются формулами

$$(8) \quad E(\theta/\xi) = m_\theta + D_{\theta\xi} D_{\xi\xi}^+(\xi - m_\xi),$$

$$(9) \quad Cov(\theta, \theta/\xi) = D_{\theta\theta} - D_{\theta\xi} D_{\xi\xi}^+ D_{\theta\xi}^T.$$

Следующий результат обобщает теорему 1.

Теорема 2. [1, 2]. Пусть

$$(\theta, \xi, \eta) = \left([\theta_1, \dots, \theta_k], [\xi_1, \dots, \xi_l], [\eta_1, \dots, \eta_m] \right)$$

– случайный (негауссовский) вектор, такой что условное распределение $P\{(\theta \leq x) \cap (\xi \leq y) / \eta\}$ является гауссовским со средними $E(\theta/\eta)$ и ковариациями $d_{11} = Cov(\theta, \theta/\eta)$, $d_{12} = Cov(\theta, \xi/\eta)$, $d_{22} = Cov(\xi, \xi/\eta)$.

Тогда вектор условных математических ожиданий $E(\theta/\xi, \eta)$ и условная матрица ковариаций $\text{Cov}(\theta, \theta/\xi, \eta)$ задаются формулами

$$E(\theta/\xi, \eta) = E(\theta/\eta) + d_{12}d_{22}^+[\xi - E(\xi/\eta)],$$

$$\text{Cov}(\theta, \theta/\xi, \eta) = d_{11} - d_{12}d_{22}^+d_{12}^T.$$

Приводимая ниже теорема является ключевой в теории оценивания частично наблюдаемых гауссовских последовательностей.

Теорема 3. [1, 2]. В предположениях теоремы 1 условное распределение $P\{\theta \leq x/\xi\}$ является гауссовским с параметрами $E(\theta/\xi)$, $\text{Cov}(\theta, \theta/\xi)$ задаваемыми формулами (8) и (9), то есть условная характеристическая функция $\varphi_\theta(z/\xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(z/\xi) &= E[\exp(i\langle z, \theta \rangle)/\xi] = \\ &= \exp\left(i\langle z, E(\theta/\xi) \rangle - \frac{1}{2}\langle z, \text{Cov}(\theta, \theta/\xi)z \rangle\right). \end{aligned}$$

5. Оптимальное оценивание

Пусть $(\theta, \xi) = ([\theta_1, \dots, \theta_k], [\xi_1, \dots, \xi_l])$ – случайный (негауссовский) частично-наблюдаемый вектор и необходимо по наблюдению случайной компоненты ξ оценить случайную компоненту θ оптимальным в среднеквадратическом смысле образом, то есть среди всех случайных векторов $\tilde{\theta}(\xi) = [\tilde{\theta}_1(\xi), \dots, \tilde{\theta}_k(\xi)]$ с конечным вторым моментом $E[\tilde{\theta}^T(\xi)\theta(\xi)] < \infty$, элементы которых $\tilde{\theta}_j(\xi)$, $j = 1, \dots, k$, являются скалярными функциями от (ξ_1, \dots, ξ_l) , найти вектор $\hat{\theta}(\xi)$ такой, что величина

$$\delta = E[(\theta - \hat{\theta}(\xi))^T(\theta - \hat{\theta}(\xi))]$$

достигает минимального значения.

Оценка $\hat{\theta}(\xi)$ называется *оптимальной в среднеквадратическом* оценкой вектора θ , а величина δ – *среднеквадратической ошибкой оценивания*.

Теорема 4. [1, 2]. Оптимальная в среднеквадратическом оценка случайного вектора θ по наблюдению случайного вектора ξ есть условное математическое ожидание

$$\hat{\theta}(\xi) = E(\theta/\xi).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \delta &= E[(\theta - \tilde{\theta}(\xi))^T(\theta - \tilde{\theta}(\xi))] = \\
 &= E[(\theta - E(\theta/\xi))^T(\theta - E(\theta/\xi))] + \\
 (10) \quad &+ 2E[(\theta - E(\theta/\xi))^T(E(\theta/\xi) - \tilde{\theta}(\xi))] + \\
 &+ E[(\tilde{\theta}(\xi) - E(\theta/\xi))^T(\tilde{\theta}(\xi) - E(\theta/\xi))] = \\
 &= E[(\theta - E(\theta/\xi))^T(\theta - E(\theta/\xi))] + \\
 &+ E[(\tilde{\theta}(\xi) - E(\theta/\xi))^T(\tilde{\theta}(\xi) - E(\theta/\xi))],
 \end{aligned}$$

поскольку в силу свойств условного математического ожидания

$$\begin{aligned}
 &E[(\theta - E(\theta/\xi))^T(E(\theta/\xi) - \tilde{\theta}(\xi))] = \\
 &= E\{E[(\theta - E(\theta/\xi))^T(E(\theta/\xi) - \tilde{\theta}(\xi))/\xi]\} = \\
 &= E\{E[(\theta - E(\theta/\xi))^T/\xi](E(\theta/\xi) - \tilde{\theta}(\xi))\} = 0.
 \end{aligned}$$

Из (10) следует утверждение теоремы.

Практическое применение этой теоремы возможно в тех случаях, когда условное математическое ожидание $E(\theta/\xi)$ удается вычислить. Если (θ, ξ) – гауссовский вектор, то $E(\theta/\xi)$ может быть найдено с помощью теоремы о нормальной корреляции, из которой, в частности, следует, что оптимальная оценка $\hat{\theta}(\xi) = E(\theta/\xi)$ является линейной функцией ξ .

Когда же случайный вектор $E(\theta/\xi)$ не является гауссовским, оптимальные оценки получить затруднительно. Однако удается получить эффективные оценки, оптимальные в более узком линейном классе оценок.

Пусть (θ, ξ) – случайный негауссовский вектор с конечными вторыми моментами, а $(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})$ – гауссовский вектор, имеющий те же математическое ожидание и ковариационную матрицу, что и вектор (θ, ξ) , существующий в силу леммы 2. Этот вектор называется *гауссовским аналогом* вектора (θ, ξ) . Пусть далее $\hat{l}(\xi) = E(\tilde{\theta}/\tilde{\xi})$ – оптимальная в среднеквадратическом оценка вектора $\tilde{\theta}$ по наблюдению $\tilde{\xi}$, которая в силу теоремы о нормальной корреляции 1 является линейной.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. [1, 2]. Случайный вектор $\hat{l}(\xi)$ является оптимальной в среднеквадратическом смысле линейной оценкой вектора θ по наблюдению ξ .

Действительно, пусть $l(\xi)$ – произвольная линейная функция ξ . Тогда в силу линейности $l(\xi)$ и $\hat{l}(\xi)$ и совпадения первых двух моментов у (θ, ξ) и $(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})$ имеем:

$$\begin{aligned} E[(\theta - \hat{l}(\xi))^T(\theta - \hat{l}(\xi))] &= E[(\tilde{\theta} - \hat{l}(\tilde{\xi}))^T(\tilde{\theta} - \hat{l}(\tilde{\xi}))] \leq \\ &\leq E[(\tilde{\theta} - l(\tilde{\xi}))^T(\tilde{\theta} - l(\tilde{\xi}))] = E[(\theta - l(\xi))^T(\theta - l(\xi))], \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы.

«Физическая суть» этой теоремы заключается в следующем. Для построения оптимальной в среднеквадратическом линейной оценки ненаблюдаемой компоненты θ двухкомпонентного вектора (θ, ξ) по наблюдению ξ надо построить его гауссовский аналог $(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})$ и в выражение для условного среднего $E(\tilde{\theta}/\tilde{\xi})$, которое дает теорема о нормальной корреляции, подставить реальное наблюдение ξ вместо гипотетического $\tilde{\xi}$.

6. Гауссовско-марковские случайные последовательности

Рассмотрим последовательность случайных k -мерных векторов $\{\theta_t\}$, $t = 0, 1, \dots, T$, задаваемых линейным рекуррентным уравнением

$$(11) \quad \theta_{t+1} = a_0(t) + a_1(t)\theta_t + b(t)\varepsilon_{t+1},$$

где $a_0(t)$ – k -мерный вектор, $a_1(t)$, $b(t)$ – матрицы размерности $(k \times k)$, $\{\varepsilon_t\}$ – последовательность независимых k -мерных гауссовских векторов с $E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t\varepsilon_t^T = I_{(k \times k)}$. Начальное условие θ_0 предполагается гауссовским вектором, независимым от последовательности $\{\varepsilon_t\}$.

Для классов случайных последовательностей, задаваемых рекуррентными соотношениями типа (11), удастся решить ряд задач оценивания. Естественно поэтому выяснить, насколько широк этот класс. Оказывается, что этот класс совпадает с классом гауссовско-марковских случайных последовательностей, к определению которого мы и переходим.

В основе понятия марковской случайной последовательности $\{\xi_t\}, t = 0, 1, \dots$, со значениями в \mathbb{R}^n лежит представление о системе, поведение которой в будущем при фиксированном состоянии в настоящем не зависит от прошлых состояний.

Определение 3. Случайная последовательность $\{\xi_t\}, t = 0, 1, \dots$, называется *марковской*, если при $s < t$

$$(12) \quad E[\exp(i\langle z, \xi_t \rangle) / \xi_0, \dots, \xi_s] = E[\exp(i\langle z, \xi_t \rangle) / \xi_s].$$

В случае марковской и гауссовской последовательности $\{\xi_t\}, t = 0, 1, \dots$, условие (12) можно выразить в терминах корреляционных функций.

Теорема 6. [1, 2]. Пусть $\{\xi_t\}, t = 0, 1, \dots$ – гауссовская последовательность с корреляционной функцией

$$K(t, s) = E[(\xi_t - E\xi_t)(\xi_s - E\xi_s)^T].$$

Тогда последовательность $\{\xi_t\}, t = 0, 1, \dots$, является марковской тогда и только тогда, когда для любых $t > u > s$

$$K(t, s)K^+(s, s) = K(t, u)K^+(u, u)K(u, s)K^+(s, s).$$

Отметим важное для теории фильтрации свойство гауссовско-марковских последовательностей.

Теорема 7. [1, 2]. Класс гауссовско-марковских последовательностей и класс случайных последовательностей, задаваемых рекуррентными соотношениями типа (11), совпадают.

7. Условно-гауссовские последовательности.

Теорема фильтрации.

Пусть $(k + l)$ -мерная частично-наблюдаемая случайная последовательность

$$\{\theta_t, \xi_t\} = \{[\theta_{1t}, \dots, \theta_{kt}], [\xi_{1t}, \dots, \xi_{lt}]\}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

подчиняется следующей системе рекуррентных уравнений.

Ненаблюдаемая компонента θ_t :

$$(13) \quad \theta_{t+1} = a_0(t, \xi_0^t) + a_1(t, \xi_0^t)\theta_t + \sum_{j=1}^2 b_j(t, \xi_0^t)\varepsilon_j(t+1).$$

Наблюдения ξ_t :

$$(14) \quad \xi_{t+1} = A_0(t, \xi_0^t) + A_1(t, \xi_0^t)\theta_t + \sum_{j=1}^2 B_j(t, \xi_0^t)\varepsilon_j(t+1).$$

Здесь $\{\varepsilon_1(t)\}, \{\varepsilon_2(t)\}$ – независимые последовательности независимых гауссовских векторов с $E\varepsilon_1(t) = 0, E\varepsilon_2(t) = 0,$

$$E[\varepsilon_1(t)\varepsilon_1^T(t)] = I_{(k \times k)}, \quad E[\varepsilon_2(t)\varepsilon_2^T(t)] = I_{(l \times l)},$$

$$a_0(t, \xi_0^t) = [a_{01}(t, \xi_0^t), \dots, a_{0k}(t, \xi_0^t)] \text{ и}$$

$$A_0(t, \xi_0^t) = [A_{01}(t, \xi_0^t), \dots, A_{0l}(t, \xi_0^t)]$$

– вектор-функции, а $b_j(t, \xi_0^t), B_j(t, \xi_0^t), j = 1, 2,$ и $a_1(t, \xi_0^t), A_1(t, \xi_0^t)$ – матричные функции соответствующих размеров с элементами, являющимися функциями t и вектора $\xi_0^t = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t\}.$

Система (13), (14) решается при начальных условиях $(\theta_0, \xi_0),$ где случайный вектор (θ_0, ξ_0) предполагается независимым от последовательностей $\{\varepsilon_1(t)\}, \{\varepsilon_2(t)\}, t = 1, 2, \dots$

Относительно коэффициентов системы (13), (14) и начальных условий (θ_0, ξ_0) примем следующие допущения.

1. Если $g(t, \xi_0^t)$ – любая из компонент векторных или матричных функций-коэффициентов системы (13), (14), то

$$E|g(t, \xi_0^t)|^2 < \infty, \quad t = 0, 1, \dots$$

2. С вероятностью «единица» элементы матриц a_1 и A_1 ограничены.

3. $E(\|\theta_0\|^2 + \|\xi_0\|^2) < \infty,$ где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n.$

4. Условное распределение $P(\theta_0 \leq x/\xi_0)$ является гауссовским.

Из предположений 1–3 вытекает, что при любом $t < \infty$

$$E(\|\theta_t\|^2 + \|\xi_t\|^2) < \infty.$$

Физически процесс θ_t можно интерпретировать как процесс эволюции фазовых координат некоторого динамического объекта, подверженного случайным возмущениям, за которым ведутся наблюдения ξ_t при наличии помех.

Для частично наблюдаемой последовательности $\{\theta_t, \xi_t\}$ ставится задача фильтрации, которая состоит в построении оценок для ненаблюдаемой компоненты θ_t по наблюдениям ξ_0^t .

Пусть $F_{\xi_0^t}(x) = P(\theta_t \leq x/\xi_0^t)$ – условная функция распределения с $m_t = E(\theta_t/\xi_0^t)$, $\gamma_t = E[(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^T/\xi_0^t]$.

В силу теоремы 4 апостериорное среднее m_t является оптимальной в среднеквадратическом оценке вектора θ_t по наблюдениям $\xi_0^t = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t\}$, а

$$\text{tr } E\gamma_t = \sum_{j=1}^k E[\theta_j(t) - m_j(t)]^2$$

дает величину ошибки оценивания.

В случае произвольной частично наблюдаемой последовательности $\{\theta_t, \xi_t\}$ отыскание вида распределения $F_{\xi_0^t}(x)$ и его параметров m_t и γ_t представляется весьма трудной задачей. Однако для последовательностей $\{\theta_t, \xi_t\}$, управляемых системой (13), (14), решение задачи фильтрации (то есть отыскание m_t и γ_t) становится эффективным. Так, например, если коэффициенты в (13), (14) не зависят от ξ_0^t , а вектор начальных условий (θ_0, ξ_0) является гауссовским, то случайная последовательность $\{\theta_t, \xi_t\}$ также гауссовская, и для оценки любой компоненты вектора $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_t\}$ по наблюдениям вектора $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t\}$ можно воспользоваться теоремой о нормальной корреляции. Использование теоремы 2, обобщающей теорему о нормальной корреляции, позволяет эффективно решать задачу фильтрации для частично наблюдаемой последовательности (13), (14), не являющейся, вообще говоря, ни гауссовской, ни марковской. В основе этого лежит следующий результат.

Теорема 8. [1, 2]. Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда последовательность $\{\theta_t, \xi_t\}$, управляемая системой (13), (14), является условно-гауссовской, то есть условные распределения

$$P(\theta_0 \leq x_0, \theta_1 \leq x_1, \dots, \theta_t \leq x_t/\xi_0^t)$$

являются гауссовскими для каждого $t = 0, 1, \dots$

Следствие 1. Следующие условные распределения являются гауссовскими:

$$(15) \quad P(\theta_t \leq x / \xi_0^t), \quad P(\theta_{t+1} \leq x, \xi_{t+1} \leq y / \xi_0^t).$$

Следствие 1 обобщает теорему 3 на случай условно-гауссовских распределений (15). Условная гауссовость последовательности $\{\theta_t, \xi_t\}$ позволяет выписать для параметров m_t, γ_t замкнутую систему рекуррентных уравнений.

Теорема 9 (Условно-гауссовский фильтр). [1, 2]. В предположениях 1–4 параметры m_t, γ_t определяются из рекуррентных уравнений

$$(16) \quad m_{t+1} = a_0 + a_1 m_t + [b \circ B + a_1 \gamma_t A_1^T] [B \circ B + A_1 \gamma_t A_1^T]^{-1} \times \\ \times [\xi_{t+1} - A_0 - A_1^T],$$

$$(17) \quad \gamma_{t+1} = a_1 \gamma_t a_1^T + b \circ b - [b \circ B + a_1 \gamma_t A_1^T] [B \circ B + A_1 \gamma_t A_1^T]^{-1} \times \\ \times [b \circ B + a_1 \gamma_t A_1^T]^T.$$

Здесь обозначено

$$(18) \quad b \circ b = b_1 b_1^T + b_2 b_2^T, \quad b \circ B = b_1 B_1^T + b_2 B_2^T, \\ B \circ B = B_1 B_1^T + B_2 B_2^T.$$

В (16)–(18) зависимость всех коэффициентов от (t, ξ_0^t) опущена.

Условно-гауссовский фильтр является обобщением *фильтра Калмана* [5] на случай зависимости от наблюдений коэффициентов линейных рекуррентных уравнений, описывающих эволюцию вектора состояния частично наблюдаемого случайного процесса, подверженного гауссовским возмущениям. К таким процессам относятся, в частности, некоторые случайные процессы с управлением, описание которых дано в следующем подразделе.

8. Траекторное управление наблюдениями

В этом подразделе рассматриваются задачи управления в дискретном времени, связанные с оценкой фазовых координат линейного стохастического объекта движущимся наблюдателем по наблюдениям, линейно-зависящим от фазовых координат объекта [8].

Пусть поведение стохастического управляемого объекта с вектором состояния θ_t и управлением v_t описывается рекуррентным уравнением

$$(19) \quad \theta_{t+1} = a_0(t, x_t)v_t + a_1(t, x_t)\theta_t + b(t, x_t)\varepsilon_1(t + 1),$$

наблюдению доступна последовательность

$$(20) \quad \xi_{t+1} = A_0(t, x_t) + A_1(t, x_t)\theta_t + B(t, x_t)\varepsilon_2(t + 1),$$

а вектор x_t состояния наблюдателя подчинен уравнению

$$(21) \quad x_{t+1} = f(t, x_t, u_t),$$

где x_0 задано.

Здесь и далее $t = 0, 1, \dots, T - 1$, а каждый из векторов $\theta_t, v_t, u_t, \xi_t, x_t, \varepsilon_1(t + 1), \varepsilon_2(t + 1)$ имеет произвольную конечную размерность. Размеры матриц-коэффициентов соответствуют данным векторам и приняты допущения 1–4 предыдущего подраздела. Последовательности $\varepsilon_1(t + 1)$ и $\varepsilon_2(t + 1)$ образуют независимые гауссовские случайные векторы с независимыми компонентами, имеющие среднее ноль и единичную ковариационную матрицу (дискретный «белый шум»). В момент $t = 0$ заданы гауссовские (с параметрами $n_\theta, d_{\theta\theta}$ и $n_\xi, d_{\xi\xi}$) векторы θ_0 и ξ_0 , причем $\text{Cov}(\theta_0, \xi_0) = d_{\theta\xi}$. Управление наблюдателя:

$$(22) \quad u_t \in U,$$

где U – некоторый конечномерный компакт. Предполагается, что множество $f(t, x_t, U)$ выпукло при любых t и x_t , а функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по x_t и u_t . Требуется так выбрать управление $v_t(x_0^t, \xi_0^t)$ объектом и управление $u_t(x_0^t, \xi_0^t)$ наблюдателем, чтобы минимизировать критерий

$$(23) \quad J = E \sum_{t=0}^T g_t(\theta_t, \xi_t, x_t, v_t, u_t) = \\ = E \left\{ G(T, x_T, \gamma_T) + \sum_{t=0}^{T-1} [\theta_t^T H(t)\theta_t + v_t^T R(t)v_t] + \theta_T^T H(T)\theta_T \right\}.$$

Здесь $H(t), H(T), R(t)$ – заданные симметрические неотрицательно определенные матрицы соответствующих размеров; $\gamma_T = E \left\{ [\theta_T - E(\theta_T/x_0^T, \xi_0^T)] [\theta_T - E(\theta_T/x_0^T, \xi_0^T)]^T / x_0^T, \xi_0^T \right\}$,

а функция G непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов.

Для исследования подобных задач обычно применяют *метод динамического программирования* Р. Беллмана. Однако вопросы существования решения уравнения Беллмана не являются тривиальными и требуют обоснования в каждом конкретном случае. Кроме того, с практической точки зрения интерес представляют такие случаи, когда из уравнения Беллмана можно эффективно определять оптимальные (в смысле критерия (23)) управления. Далее рассматриваются два таких случая.

Случай 1. Коэффициенты a_0 и a_1 уравнения (19) не зависят от x_t , то есть

$$\theta_{t+1} = a_0(t)v_t + a_1(t)\theta_t + b(t, x_t)\varepsilon_1(t+1).$$

Случай 2. В уравнении (19) отсутствует управление v_t , то есть

$$(24) \quad \theta_{t+1} = a_0(t, x_t) + a_1(t, x_t)\theta_t + b(t, x_t)\varepsilon_1(t+1),$$

а матрицы $H(t)$, $H(T)$ и $R(t)$ в критерии (23) – нулевые. В обоих случаях предполагается, что при любых x_t из множества достижимости наблюдателя (21) матрица BV^T не вырождена.

Специфика данной постановки состоит в том, что управление объектом и наблюдениями осуществляется «траекторно», то есть посредством связи (21) (физически – со стороны движущегося наблюдателя). В частности, имеется возможность управлять интенсивностью $b(\cdot)$ случайной составляющей в уравнении объекта. Такая ситуация возможна в задачах телеуправления подвижным объектом в условиях неоднородной среды.

9. Вспомогательные результаты

Аналізу случаев 1 и 2 предположим некоторые вспомогательные результаты (справедливые и для общей постановки (19)–(21)).

1. Пусть $S(t, x_t)$ – любая из матриц a_0, a_1, b, B, A_0, A_1 , тогда достаточными условиями для существования m_t и γ_t будут выполнение неравенства (понимается поэлементно)

$$(25) \quad E[S(t, x_t)^T S(t, x_t)] < \infty$$

и требование равномерной по t ограниченности элементов $s_{ij}(t, x_t)$ матрицы $S(t, x_t)$, то есть

$$(26) \quad |s_{ij}(t, x_t)| < \text{const},$$

где x_t – любое из множества t -достижимости траектории x_0^t .

Определение 4. Функционалы $u_t(x_0^t, \xi_0^t)$ и $v_t(x_0^t, \xi_0^t)$ будем называть *допустимыми управлениями*, если $u_t(x_0^t, \xi_0^t) \in U$ и их подстановка в уравнения (19), (20) не нарушает (25), (26).

Далее будем рассматривать только допустимые управления.

2. Имеет место следующее равенство условных математических ожиданий:

$$E(\cdot/x_0^t, \xi_0^t) = E(\cdot/x_t, \xi_0^t) = E(\cdot/\xi_0^t).$$

3. Поскольку управления $u_t(x_0^t, \xi_0^t)$ и $v_t(x_0^t, \xi_0^t)$ являются функционалами t, x_0^t, ξ_0^t , то система (19)–(21) находится в рамках условно-гауссовской схемы (подраздел 7), а именно, условные распределения

$$(27) \quad \begin{aligned} P(\theta_{t+1} \leq a, \xi_{t+1} \leq b, x_{t+1} \leq c/x_0^t, \xi_0^t) &= P(\cdot/\xi_0^t), \\ P(\theta_t \leq a/x_0^t, \xi_0^t) &= P(\cdot/\xi_0^t) \end{aligned}$$

являются гауссовскими, причем параметры распределения (27) подчинены рекуррентным уравнениям условно-гауссовской фильтрации (9)

$$(28) \quad \begin{aligned} m_{t+1} &= [a_0 v_t + a_1 m_t] + a_1 \gamma_t A_1^T (BB^T + A_1 \gamma_t A_1^T)^{-1} \times \\ &\times (\xi_{t+1} - A_0 - A_1 m_t), \end{aligned}$$

$$(29) \quad \gamma_{t+1} = [a_1 \gamma_t a_1^T + b b^T] - a_1 \gamma_t A_1^T (BB^T + A_1 \gamma_t A_1^T)^{-1} A_1 \gamma_t a_1^T.$$

Здесь у матриц a_0, \dots, B аргументы опущены. Значения m_0 и γ_0 определяются по условиям задачи на основании теоремы 1 о нормальной корреляции:

$$m_0 = n_\theta + d_{\theta\xi} d_{\xi\xi}^+ (\xi_0 - n_\xi), \quad \gamma_0 = d_{\theta\theta} - d_{\theta\xi} d_{\xi\xi}^+ d_{\theta\xi}^T.$$

В силу теоремы 4, при фиксированных управлениях уравнения (28) и (29) задают оптимальную в среднеквадратическом оценку вектора θ_t .

4. Следствием утверждения 3 является выполнение равенства

$$(30) \quad \begin{aligned} E \{ g_t(\theta_t, \xi_t, x_t, v_t(x_0^t, \xi_0^t), u_t(x_0^t, \xi_0^t)) / \xi_0^t \} = \\ = \tilde{g}_t(m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t, u_t, v_t), \end{aligned}$$

где \tilde{g}_t – некая функция своих переменных.

5. При выполнении условий 1 найдутся независимые между собой гауссовские векторы $\tilde{\varepsilon}(t+1)$ с независимыми компонентами, имеющими среднее ноль и единичную дисперсию, такие что (с вероятностью «единица»)

$$\xi_{t+1} = A_0(t, x_t) + A_1(t, x_t)m_t + D_t(\gamma_t, x_t)\tilde{\varepsilon}(t+1),$$

где $D_t = [BB^T + A_1\gamma_t A_1^T]^{1/2}$, а $\tilde{\varepsilon}(t+1)$ не зависят от ξ_0^t . Это утверждение вытекает из леммы 2. Следовательно уравнение (28) можно переписать так:

$$m_{t+1} = [a_0v_t + a_1m_t] + a_1\gamma_t A_1^T D_t^{-1} \tilde{\varepsilon}(t+1),$$

где $\tilde{\varepsilon}(t+1)$ – «новый» дискретный «белый шум».

6. Если в качестве управлений взять любые допустимые функции $u_t = u(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)$ и $v_t = v(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)$, то

$$(31) \quad \begin{aligned} E [g_t(\theta_t, \xi_t, x_t, v(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t), u(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)) / \xi_0^t] = \\ = \tilde{g}_t(m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t, v(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t), u(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)) = \\ = E [g_t(\theta_t, \xi_t, x_t, v(\cdot), u(\cdot)) / m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t], \end{aligned}$$

причем

$$(32) \quad \begin{aligned} E [V_{t+1}(m_{t+1}, \gamma_{t+1}, \xi_{t+1}, x_{t+1}) / \xi_0^t] = \\ = E [V_{t+1}(m_{t+1}, \gamma_{t+1}, \xi_{t+1}, x_{t+1}) / m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t] \end{aligned}$$

для любой допустимой по совокупности аргументов функции V_t .

Справедливость (31) и (32) следует из того факта, что при утверждении 5 последовательность $(m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)$ оказывается марковской. Марковость проверяется непосредственно путем установления совпадения условных (при условиях $(m_0^t, \gamma_0^t, \xi_0^t, x_0^t)$ и $(m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)$) характеристических функций случайных величин $m_{t+1}, \gamma_{t+1}, \xi_{t+1}, x_{t+1}$ (с учетом представлений (25) и (26)).

10. Решение задачи управления и наблюдения по неполным данным

Для общей постановки (19) и (20) имеет место следующая теорема разделения.

Теорема 10 (Разделения). [8].

A. Пусть существует функция $V_t(\cdot)$ (функция Беллмана) такая, что она удовлетворяет уравнению (Беллмана)

$$(33) \quad V_T(m_T, \gamma_T, \xi_T, x_T) = \min_{u_T, v_T} \tilde{g}_T(m_T, \gamma_T, \xi_T, x_T, u_T, v_T),$$

$$(34) \quad V_t(m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t) = \min_{u_t, v_t} \{ \tilde{g}_t(m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t, u_t, v_t) + \\ + E[V_{t+1}(m_{t+1}, \gamma_{t+1}, \xi_{t+1}, x_{t+1})/m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t] \}.$$

B. Пусть на управлениях

$$u_t^0 = u^0(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t), \quad v_t^0 = v^0(t, m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t)$$

достигается минимум в (33) и (34), тогда

$$C. EV_0(m_0, \gamma_0, \xi_0, x_0) = \min_{u, v} E \sum_{t=0}^T g_t(\theta_t, \xi_t, x_t, u_t, v_t),$$

где $u = \{u_t : t = 0, 1, \dots, T\}$, $v = \{v_t : t = 0, 1, \dots, T\}$.

D. Управления u_t^0 , v_t^0 (на которых достигается минимум в (33) и (34)) – оптимальные.

Суть теоремы 10 в следующем. При условии А и В существуют оптимальные управления в исходной задаче в виде функций от t, m_t, γ_t, ξ_t и x_t , где $m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t$ удовлетворяют системе (19), (20) плюс рекуррентным уравнениям (28), (29) условно-гауссовской фильтрации, то есть $m_t, \gamma_t, \xi_t, x_t$ являются достаточными статистками, которые находятся из решения задачи фильтрации. Таким образом, задача управления по неполным данным стохастической системой сводится к двум новым задачам: задаче фильтрации и задаче управления по полным данным, которые решаются раздельно.

Заметим, что если критерий не зависит явно от наблюдений ξ_t , то аргумент ξ_t в формулах (30) исчезает и достаточными статистками будут m_t, γ_t, x_t .

Практическое применение эта теорема находит, в частности, при синтезе так называемых условно-программных управлений подвижными объектами [7]. Построение этих управлений

осуществляется следующим образом. Принимая текущий момент времени t и текущие значения m_t, γ_t, x_t за начальные, на некотором временном отрезке $[t, t + \tau]$ строится программное управление $u_s = u_s(m_t, \gamma_t, x_t)$, $s \in [t, t + \tau]$ наблюдателя в соответствии с имеющимся критерием оптимальности. В течение времени τ наблюдатель движется в соответствии с выработанной в момент t программой, производя по ходу движения текущие измерения и вычисляя оценки m_s и значения γ_s . В момент $t + \tau$ производится коррекция программы, а именно: момент $t + \tau$ и значения $m_{t+\tau}, \gamma_{t+\tau}, x_{t+\tau}$ принимаются за начальные и строится новое программное управление $u_s = u_s(m_{t+\tau}, \gamma_{t+\tau}, x_{t+\tau})$, $s \in [t+\tau, t+2\tau]$ и т.д. Полученное кусочно-программное управление наблюдателем и называется условно-программным. Прибавка «условно» подчеркивает его зависимость (через m_t) от конкретной реализации наблюдений.

Перейдем теперь непосредственно к анализу случаев 1 и 2. Как будет видно далее, в этих случаях условия А и В теоремы разделения выполняются.

Перепишем критерий (23) в виде

$$\begin{aligned} & E \left\{ G(T, x_T, \gamma_T) + \sum_{t=0}^{T-1} (v_t^T R(t) v_t) + \sum_{t=0}^T E [\theta_t^T H(t) \theta_t / \xi_0^t] \right\} = \\ & = E \left\{ G(T, x_T, \gamma_T) + \sum_{t=0}^{T-1} (v_t^T R(t) v_t) + \right. \\ & \left. + \sum_{t=0}^T [m_t^T H(t) m_t + \text{tr}(H^{1/2}(t) \gamma_t H^{1/2}(t))] \right\} = \\ & = \sum_{t=0}^T \tilde{g}_t(m_t, \gamma_t, x_t, u_t, v_t). \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой разделения напишем уравнение Беллмана с терминальным условием для данной задачи:

$$\begin{aligned} & V_T(m_T, \gamma_T, x_T) = \\ & = G(T, x_T, \gamma_T) + m_T^T H(T) m_T + \text{tr}(H^{1/2}(T) \gamma_T H^{1/2}(T)), \\ & V_t(m_t, \gamma_t, x_t) = \\ (35) \quad & = \min_{u_t, v_t} [m_t^T H(t) m_t + \text{tr}(H^{1/2}(t) \gamma_t H^{1/2}(t)) + \\ & + v_t^T R(t) v_t + E(V_{t+1}(m_{t+1}, \gamma_{t+1}, x_{t+1}) / m_t, \gamma_t, x_t)], \end{aligned}$$

где m_{t+1}, γ_{t+1} удовлетворяют уравнениям условно-гауссовской фильтрации (28), (29).

Теорема 11. [8]. В случае 1 решение уравнения Беллмана (35) существует и имеет вид

$$V_t(m_t, \gamma_t, x_t) = m_t^T q(t) m_t + Q_t(x_t, \gamma_t),$$

где матрица $q(t)$ – симметрическая неотрицательно определенная, а функция $Q_t(x_t, \gamma_t)$ непрерывна по совокупности (x_t, γ_t) .

Оптимальные управления имеют вид

$$\begin{aligned} v_t^0 &= -L(t)m_t, \\ u_t^0 &= u^0(t, \gamma_t, x_t), \end{aligned}$$

где $L(t)$ – детерминированная матрица, вычисляемая по коэффициентам a_0 и a_1 уравнения (19) и матрицам $H(t)$, $H(T)$ и $R(t)$.

Доказательство. Доказательство проводится методом обратной индукции по t от $t = T$ до $t = 0$. В процессе доказательства показывается, что функция Беллмана имеет следующую структуру:

$$(36) \quad V_t(m_t, \gamma_t, x_t) = \min_{v_t} J_1(v_t, m_t, t) + \min_{u_t} J_2(u_t, \gamma_t, x_t, t),$$

где функции $J_1(\cdot)$ и $J_2(\cdot)$ задаются в явном виде, причем $J_1(\cdot)$ представляет собой квадратичную форму. Из (36) следует, что минимизация по v_t и u_t осуществляется отдельно и при этом $v_t^0 = v^0(t, m_t)$, а $u_t^0 = u^0(t, \gamma_t, x_t)$. Конкретно

$$v_t^0 = -[R(t) + a_0^T q(t+1) a_0]^+ a_0^T q(t+1) a_1 m_t = -L(t) m_t.$$

Матрицы $q(t)$ удовлетворяют рекуррентному уравнению Риккати

$$(37) \quad q(t) = H(t) + a_1^T q(t+1) a_1 -$$

$$-a_1^T q(t+1) a_0 [R(t) + a_0^T q(t+1) a_0]^+ a_0^T q(t+1) a_1,$$

$$(38) \quad q(T) = H(T).$$

Из (37), (38) следует, что матрицы $q(t)$ – симметрические, неотрицательно определенные и детерминированные (то есть $L(t)$ детерминировано).

Следствие 2. Оптимальное управление u_t^0 детерминировано. В самом деле, $u_t^0 = u^0(t, x_t, \gamma_t)$, но рекуррентные уравнения (29) и (21) оказываются замкнутыми по переменным x_t, γ_t и детерминированными.

На самом деле имеет место более сильное утверждение.

Теорема 12. [8]. *В случае 1 оптимальное управление наблюдателя u_t^0 программно (то есть $u_t^0 = u^0(t)$) и может быть найдено из решения некоторой детерминированной задачи дискретного оптимального управления.*

Замечание 1. В силу оговоренной в постановке задачи выпуклости множеств $f(t, x_t, U)$ при любых x_t из множества t -достижимости траектории x_0^t , для нахождения оптимального управления u_t^0 можно воспользоваться дискретным принципом максимума [6], на базе которого разработаны эффективные численные алгоритмы [6, 10]

Перейдем теперь к анализу случая 2, в котором динамика объекта описывается уравнением (24), а критерием служит функционал

$$J = EG(T, x_T, \gamma_T) \rightarrow \min_u.$$

Теорема 13. [8]. *В случае 1 оптимальное управление наблюдателя u_t^0 программно (то есть $u_t^0 = u^0(t)$) и находится из решения детерминированной задачи дискретного оптимального управления динамической системой с фазовыми координатами x_t, γ_t подчиненными рекуррентным уравнениям (21) и (29), ограничением по управлению (22) и критерием*

$$J = G(T, x_T, \gamma_T) \rightarrow \min_u.$$

Замечание 1 остается верным и в случае 2.

Аналогичные результаты имеют место и при «редких» дискретных наблюдениях с шагом дискретизации $\Delta > 1$, превышающем дискретность времени в уравнении (19). Решение задачи в этом случае опирается на построение вспомогательного дискретного процесса θ_t , совпадающего θ_t в точках наблюдения [3].

11. Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу преследования [8]. Преследователь P и цель E движутся друг за другом вдоль положительного направления полуоси OX некоторой

неподвижной системы координат, причем E движется равномерно со своей максимально возможной скоростью, не известной преследователю. Преследователь P в моменты $t = 1, 2, \dots, T$ измеряет дистанцию ξ_t до E с некоторой аддитивной помехой $\varepsilon(t)$:

$$\xi_t = \theta_1 + \theta_2 t - x_1(t) + B_t \varepsilon(t),$$

где θ_1 – положение цели при $t=0$, θ_2 – ее скорость, а $x_1(t)$ – текущее положение преследователя. Предполагается, что $0 = x_1(0) < \theta_1$. Пусть интенсивность помехи

$$B_t = kx_2(t) + b_0 - hx_1(t),$$

где k , b_0 и h – заданные положительные константы, то есть с ростом скорости $x_2(t)$ преследователя помеха в наблюдениях растет, а с уменьшением расстояния до цели (что в данном примере равносильно увеличению значения координаты $x_1(t)$) – убывает. Константа b_0 характеризует естественный шумовой фон в канале измерения.

Уравнения движения P имеют вид

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$x_2(t+1) = u(t), \quad x_2(0) = 0,$$

где управление преследователя $u(t) \in [0, \hat{u}]$, $\hat{u} > 0$, – задано.

Преследователю необходимо, с одной стороны, максимально сблизиться с целью за заданное время преследования T , а с другой стороны, реализовать процесс сближения так, чтобы к моменту T поточнее определить фазовые координаты цели. По этой причине в качестве критерия рассмотрим функционал

$$J = -\nu x_1(T) + \text{tr } \gamma_T \rightarrow \min_u,$$

где $\nu > 0$ – заданная константа.

Решение задачи при $t = 0, 1, \dots, 10$ и исходных параметрах из таблицы 1.1.1 приведено в таблице 1.1.2.

В таблице 1.1.2 строки J_* , J_0 и J_1 отвечают значениям критериев соответственно при оптимальном управлении $u^0(t)$, управлениях $u(t) \equiv 0$ и $u(t) \equiv 1$. Реализация оптимального управления как функции времени символически изображены последовательностями нулей и единиц, где единица соответствует $u^0(t) = \hat{u}$, а ноль – $u^0(t) = 0$.

Таблица 1.1.1. Параметры моделирования в задаче преследования

\hat{u}	k	h	$\gamma_{11}(0)$	$\gamma_{22}(0)$	$\gamma_{12}(0)$
0,25	3,6	0,12	1,0	0,625	0,0

Таблица 1.1.2. Значения критерия J при разных управлениях

$b_0 = 0,1$			
ν	0,001	0,01	0,1
J_*	0,0024	-0,0119	-0,2122
J_0	0,0036	0,0036	0,0036
J_1	0,2337	0,2112	-0,0138
u^0	0000111110	0011111110	0111111110
$b_0 = 0,3$			
ν	0,001	0,01	0,1
J_*	0,0289	0,0190	-0,1483
J_0	0,0308	0,0308	0,0308
J_1	0,2856	0,2631	0,0381
u^0	0000011110	0000111110	0111111111

Результаты моделирования позволяют сделать определенные выводы о структуре оптимального траекторного управления наблюдениями со стороны преследователя. Процесс управления состоит из трех этапов, а именно:

I этап – уточнение априорной информации об объекте наблюдения. В течение этого этапа преследователь стоит на месте с $u_t = 0$ (не шумит!), создавая для себя максимально комфортные условия для наблюдения за объектом.

II этап – маршевый. В течение этого этапа преследователь движется с максимально возможной скоростью $u_t = \hat{u}$, сближаясь с преследуемым объектом.

III этап – окончательное «доуточнение» координат объекта при $u_t = 0$.

Отметим, что третий этап может отсутствовать, однако наличие I этапа обязательно. Наличие I этапа имеет глубокий философский смысл: «прежде чем куда-то бежать „сломя голову“,

нужно вначале определиться, куда конкретно».

Интересно заметить, что эта трехэтапная структура траекторного управления сохраняется и для задач преследования с более сложной динамикой преследователя и преследуемого.

12. Замечание о робастных свойствах линейных фильтров

Согласно теореме 4 апостериорное среднее $\hat{\theta}(\xi) = E(\theta/\xi)$ является оптимальной в среднеквадратическом оценке случайного вектора θ по наблюдению случайного вектора ξ . Как отмечалось, эта оценка не обязана быть линейной (по ξ) и в общем случае ее вычисление может представлять определенные трудности. Более того, даже если оптимальная нелинейная оценка может быть найдена аналитически [11], ее практическое применение не всегда целесообразно. Иногда предпочтительнее пользоваться оптимальными линейными оценками. Дело в том, что кроме своей простоты с вычислительной точки зрения, линейный фильтр «грубее» оптимального нелинейного фильтра в том смысле, что оценки, даваемые линейным фильтром в случае неадекватности математической модели реальному процессу (например, при аппроксимации реального процесса скачкообразным марковским процессом с малым числом состояний, неточным знанием интенсивностей переходов между состояниями и т.п.), оказываются более точными. Покажем это явление на примере слежения за скачкообразным процессом.

Известно много постановок задач слежения за маневрирующими динамическими объектами. Как правило, маневр связан с резким (скачкообразным) изменением состояния одной или нескольких фазовых координат объекта (скоростей, ускорений и т.п.). Удобной математической моделью для описания маневра является скачкообразный марковский процесс с конечным числом состояний [12]. Однако ситуация осложняется тем, что сами возможные состояния и значения переходных вероятностей на практике точно не известны. В лучшем случае известен лишь диапазон их значений. В качестве иллюстрирующего примера

рассмотрим задачу отслеживания траектории некоторого одномерного скачкообразного процесса θ_t , о котором лишь известно, что его значение принадлежит заданному отрезку $[a, b]$ числовой прямой, и задано среднее время τ_1 пребывания этого процесса в любом фиксированном состоянии. Скачкообразность процесса состоит в том, что среднее время τ_2 перехода из произвольно фиксированного состояния в любое другое много меньше τ_1 . Предполагается, что за процессом θ_t на интервале $[0, T]$ осуществляются дискретные наблюдения через равные промежутки времени (всего 150 наблюдений в рассматриваемом примере) с аддитивной гауссовской помехой.

Данная задача решалась следующим образом [9]. Диапазон $[a, b] = [0, 1]$ разбивался на конечное число (4 – в данном примере) примерно равноотстоящих уровней $0 < a_1 < \dots < a_4 < 1$. Далее делалось предположение, что процесс θ_t – скачкообразный марковский, состояниями которого являются уровни a_i , а интенсивности переходов $\lambda_{ij} = 1/\tau_1$ для $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^4 \lambda_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, 4$. Для такого процесса строились оптимальные нелинейный и линейный фильтры.

Результаты моделирования представлены на рис. 1.1.1, где сплошной линией изображена одна и та же траектория, отслеживаемая оптимальным 1) нелинейным и 2) линейным фильтрами, рассчитанными на оценку процесса с состояниями a_i , $i = 1, \dots, 4$ (эти состояния отмечены на рис. 1.1.1 горизонтальными линиями). Результаты моделирования позволяют сделать следующий вывод. При неадекватности математической модели реальному скачкообразному процессу (например, когда состояния реального процесса не совпадают с состояниями модельного, как на рис. 1.1.1) оптимальный линейный фильтр оказывается предпочтительнее оптимального нелинейного («обманутый» нелинейный фильтр начинает «метаться» между предписанными ему состояниями).

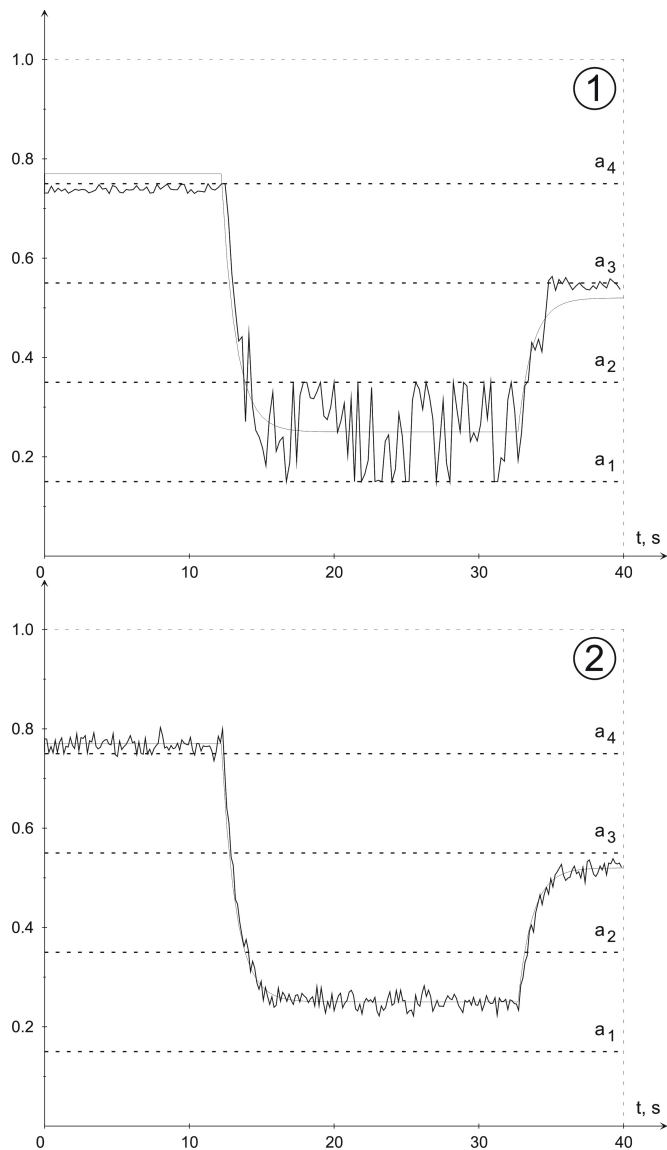


Рис. 1.1.1. Оценки «обманутых» оптимальных фильтров:
1) нелинейного; 2) линейного

Литература

1. ГРИГОРЬЕВ Ф.Н., КУЗНЕЦОВ Н.А., СЕРЕБРОВСКИЙ А.П. *Управление наблюдениями в автоматических системах*. – М.: Изд-во «Наука», 1986. – 216 с.
2. КИЦУЛ П.И., ЛИПЦЕР Р.Ш. *Рекуррентное оценивание случайных последовательностей*: препринт. – М.: ИАТ, 1974. – 70 с.
3. КИЦУЛ П.И. *О непрерывно-дискретной фильтрации марковских процессов диффузионного типа* // Автоматика и телемеханика. – 1970. – №11. – С. 29–37.
4. ЛИПЦЕР Р.Ш., ШИРЯЕВ А.Н. *Статистика случайных процессов*. – М.: Изд-во «Наука», 1974. – 696 с.
5. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
6. ПРОПОЙ А.И. *Элементы теории оптимальных дискретных процессов*. – М.: Изд-во «Наука», 1973. – 256 с.
7. РУБИНОВИЧ Е.Я., АНДРЕЕВ К.В. *Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №1. – С. 134–162.
8. РУБИНОВИЧ Е.Я. *Траекторное управление наблюдениями в дискретных стохастических задачах оптимизации* // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №3. – С. 93–102.
9. РУБИНОВИЧ Е.Я. *Робастная линейная фильтрация скачкообразных процессов* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №3. – С. 149–155.
10. ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л., БАНИЧУК Н.В. *Вариационные задачи механики и управления: Численные методы*. – М.: Изд-во «Наука», 1973. – 240 с.
11. KARYLOV A.K. *Nonlinear Filtering of Stochastic Processes from Discrete-Time Data* // Problems of Control and Information Theory. – 1979. – Vol. 8(1). – P. 39–54.
12. KRICHAGINA N.V., LIPTSER R.SH., RUBINOVICH E.YA. *Kalman Filter for Markov Processes* / In: Statistics and Control of Stochastic Processes. – New York: Publ. Div., 1985. – P. 197–213.

1.2. СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Глумов В.М.¹, Честнов В.Н.², Ядыкин И.Б.³

1. Введение

Термин «адаптация» пришел в теорию автоматического управления из физиологии, где под адаптацией понимается приспособление организма к условиям существования. Окружающая среда «влияет» на свойства объекта управления путем изменения параметров его модели. Если свойства модели объекта зависят от переменных параметров, то такая система называется *системой с параметрической неопределенностью* [12]. *Адаптивной системой* называется система управления, в которой регулятор автоматически изменяет свою структуру или свои параметры в зависимости от изменения параметров объекта управления или свойств возмущения. Принцип работы адаптивной системы управления состоит в том, что для нее задается функция или *функционал качества* J – мера качества, которая зависит от координат или параметров системы. *Цель адаптации* в этих условиях сводится к достижению экстремума меры качества по вектору управления и/или вектору перестраиваемых параметров регулятора. Отыскание экстремума может достигаться путем применения методов поиска экстремума (*экстремальное регулирование*, *поисковое корреляционно-экстремальное регулирование* [14]. При этом вектору управления или вектору параметров дается «пробное» отклонение и в процессе работы измеряется отклонение меры качества.

В *беспоисковых адаптивных системах* (БАС) цель адаптации достигается без процесса поиска, а путем минимизации

¹ Виктор Михайлович Глумов, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н. (vglum@ipu.ru).

² Владимир Николаевич Честнов, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., доцент (vnchest@yandex.ru).

³ Игорь Борисович Ядыкин, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., профессор (Jad@ipu.ru).

функционала невязки между состояниями или параметрами управляемой системы и ее эталонной модели. Различают два основных класса БАС: БАСИ – беспойсковые адаптивные системы с идентификатором и БАСЭМ – беспойсковые адаптивные системы с эталонной моделью. В первых идентификатор (Identificator) играет роль «датчика» измерения и компенсации отклонений параметров настраиваемой системы от параметров эталонной модели. Во вторых эталонная модель (Reference Model) присутствует в явном виде, что дает возможность измерять или вычислять сигналы рассогласований между состояниями модели и системы и использовать их для формирования алгоритмов настройки параметров регулятора.

В БАС используется двухуровневая структура управления динамическим объектом. Первый уровень, называемый *основным контуром*, образован контуром управления с обратной связью [12, раздел 1.3.2], в котором присутствуют регулятор координатного управления РКУ и регулятор параметрического управления РПУ. Второй уровень образован устройством адаптации, который в БАСИ состоит из блока настройки регулятора и идентификатора, а в БАСЭМ – из блока формирования ошибки настройки, эталонной модели и блока настройки регулятора. Следует упомянуть также о двух классах БАС, в которых используются эвристические методы формирования алгоритмов настройки регулятора: БАС с информацией о временных характеристиках и БАС с информацией о частотных характеристиках [14]. БАС, в которых изменяется структура регулятора, называются *самоорганизующимися*. Если мера качества представляет собой критерий оптимальности или их совокупность, то такие системы называются *оптимальными* БАС.

За пять десятилетий существования теории адаптивного управления – с момента появления первой статьи [27] – опубликованы десятки тысяч статей, сотни монографий и несколько десятков учебников. Наибольшее количество публикаций относится к системам с эталонной моделью (Model Reference Adaptive Control), адаптивным системам с идентификатором (Self-adjusting Control Systems) и адаптивным системам с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control, см. раздел 1.3).

В СССР большой вклад в развитие теории и методов проектирования адаптивных систем управления внесли монографии [4, 7, 8–10, 13, 17, 18]. Из зарубежных можно отметить монографии и учебники [5–6, 23, 25–27].

В адаптивных системах встречаются два основных типа управления: *координатное* и *параметрическое*. Свойства и матричные критерии координатной управляемости и наблюдаемости рассмотрены в [12, теоремы 1.3.1 и 1.3.2].

На рис. 1.2.1 представлена структурная схема, иллюстрирующая связь свойств неадаптивных и адаптивных систем.

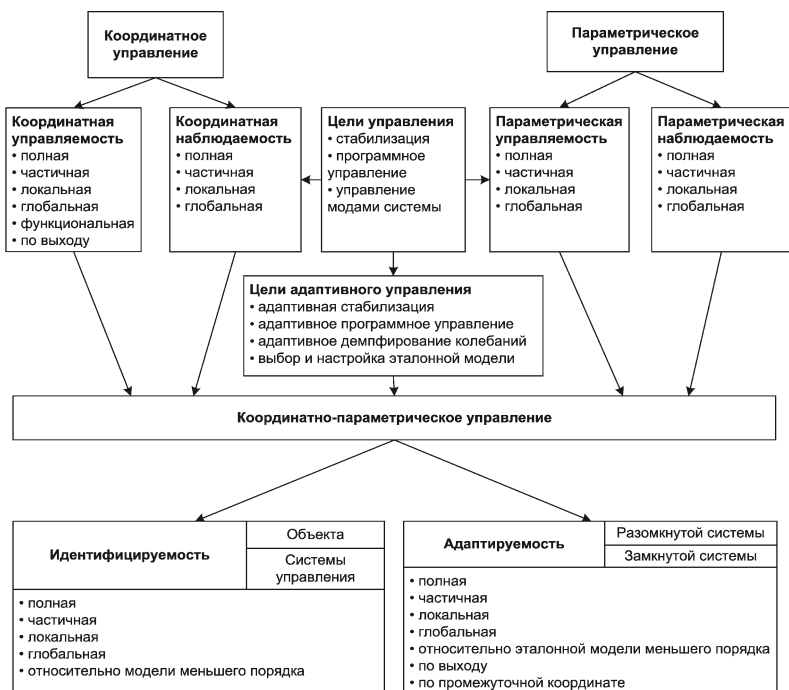


Рис. 1.2.1. Свойства неадаптивных и адаптивных систем

В адаптивных системах эти структурные свойства характеризуют системные свойства параметрического управления в отношении достижения целей адаптивного управления: полного

или частичного совпадения свойств настроенной системы со свойствами ее эталонной модели.

Поскольку *идентификации* объекта управления посвящен отдельный раздел 1.3 настоящей книги, ниже кратко будут рассмотрены только свойства и критерии *полной и частичной адаптируемости*. Формальные определения свойств можно найти в [21]. Отличие системного свойства адаптируемости от свойств координатной управляемости и наблюдаемости состоит в том, что матрицы адаптируемости в явном виде формируют алгоритм оптимальной настройки регулятора, в то время как матрицы координатной управляемости и наблюдаемости формируют лишь условия достижения целей управления и наблюдения.

В остальной части настоящего раздела изложение построено следующим образом. В подразделе 2 рассматриваются адаптивные системы с неявной эталонной моделью, иногда называемые адаптивными системами с идентификатором БАСИ. В подразделе 3 рассматриваются адаптивные системы с явной эталонной моделью БАСЭМ. В подразделе 4 рассмотрены методы синтеза неявной эталонной модели, основанные на H_∞ -оптимизации [12, раздел 2.1.5].

2. Адаптивное управление с неявной эталонной моделью

Приступая к рассмотрению адаптивных систем с неявной эталонной моделью, сформулируем две задачи:

1. Выбрать подходящий алгоритм беспойсковой идентификации (решение этой задачи рассмотрено в разделе 1.3).
2. Разработать постановку задачи синтеза регулятора, реализующего оптимальный алгоритм настройки его параметров.

Вторую задачу будем решать в классе регуляторов заданной структуры, под которой будем понимать стандартную структуру динамической системы с постоянной матрицами динамики и выхода регулятора и настраиваемыми матрицами входов [12, раздел 1.1]. Подобный регулятор содержит стационарный фильтр помех и блок настройки параметров матриц входов.

2.1. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ АДАПТИРУЕМОСТИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА АДАПТИВНОГО РЕГУЛЯТОРА

Пусть объект управления и регулятор заданной структуры описываются во временной области [12, раздел 1.1].

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2 u + B_1 w, \quad x(0) = x_0 = 0, \\ y &= C x; \\ (2) \quad \dot{x}_r &= A_{rm} x_r + G_1 (g - y), \quad x_{rm}(0) = x_{rm0}, \quad g(0) = g_0 = 0, \\ u &= C_{rm} x_r + G_2 (g - y), \quad G_1 = B_r, \quad G_2 = D_r. \end{aligned}$$

где x , x_r и y , g , u , w – векторы состояний объекта, регулятора, выхода объекта, задания, выхода регулятора и возмущения соответственно, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$, $u, y, g \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^{m_3}$. Через $A, B_1, B_2, C, A_{rm}, C_{rm}, G_1, G_2$ обозначены матрицы параметров объекта и регулятора соответствующих размерностей. Предположим, что объект (1) полностью управляем и наблюдаем [12, теоремы 1.3.1 и 1.3.2], реализации $(A, B_2, C), (A_{rm}, G_1, C_{rm}, G_2)$ минимальны [12, с. 22], а матрицы A, B, C принадлежат ограниченному множеству Σ . Целью регулирования является слежение за заданием для произвольных начального состояния и переменных параметров объекта, взятых из интервального множества Σ :

$$A, B_2, C \in \Sigma, \quad \{\Sigma: a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \quad b_{ij}^- \leq b_{ij} \leq b_{ij}^+, \quad c_{ij}^- \leq c_{ij} \leq c_{ij}^+\}.$$

Требуемые показатели качества регулирования основного контура задаются стационарной эталонной моделью разомкнутого контура, которая может быть описана системой уравнений

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m x_m + B_m g, \quad x_m(0) = x_0 = 0, \\ y_m &= C_m x_m, \end{aligned}$$

где векторы состояния x_m , выхода y_m и матрицы эталонной модели разомкнутого основного контура отмечены индексом m ; $x_m \in \mathbb{R}^{n_m}$, $y_m \in \mathbb{R}^m$, причем $n_m = n + n_r$. Отметим, что в качестве эталонной модели можно выбрать модель объекта, полученную методом ассоциативного поиска [3].

Целевые условия адаптивного синтеза регулятора с заданной структурой в частотной области в предположении нулевых начальных условий имеют вид

$$(4) \quad W(j\omega) = W_p(j\omega)W_r(j\omega) = W_m(j\omega) \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty),$$

где через $W(j\omega)$, $W_p(j\omega)$, $W_r(j\omega)$, $W_m(j\omega)$ обозначены соответственно передаточные функции разомкнутого основного контура, объекта, регулятора и эталонной модели разомкнутого основного контура. Условие (4) есть *условие идеального слежения* выхода разомкнутой системы за выходом ее неявной эталонной модели. Целевому равенству (4) соответствует полиномиальное уравнение настройки регулятора вида

$$(5) \quad \frac{\sum_{j=0}^{n_2-1} s^j C A_j B_2 \left(\sum_{\lambda=0}^{n_1-1} s^\lambda C_{m\lambda} A_{m\lambda} B_r + D_r \sum_{\nu=0}^{n_1} a_{r\nu} s^\nu I \right)}{\sum_{i=0}^{n_2} a_i s^i \sum_{\nu=0}^{n_1} a_{r\nu} s^\nu} = \frac{\sum_{\mu=0}^{n_m-1} s^\mu C_m A_{m\mu} B_m}{\sum_{\sigma=0}^{n_m} a_{m\sigma} s^\sigma},$$

где A_j , $A_{r\lambda}$, $A_{m\mu}$ – матрицы Фадеева, которые представляют собой линейные комбинации произведений коэффициентов характеристических уравнений матриц на их степени [21], например

$$A_j = \sum_{q=j+1}^n a_q A^{q-j+1}, \quad q = 1, 2, \dots, n, \quad a_n = 1.$$

Умножая обе части (5) на произведение характеристических полиномов, получим полиномиальное уравнение

$$(P_1 - Q_1)s^{2n_2+n_1-1} + \dots + (P_{2n_2+n_1-1} - Q_{2n_2+n_1-1})s + (P_{2n_2+n_1} - Q_{2n_2+n_1}) = 0.$$

Определим следующие *матрицы адаптируемости и функционалы настройки*

$$L^T = [L_{\mu 1} \quad L_{\mu 2}], \quad Q^T = [Q_{\mu 1} \quad Q_{\mu 2}]:$$

$$P_\mu = \sum_{\eta=1}^2 L_{\mu\eta} G_\eta, \quad Q_\mu = Q_{\mu 1} + Q_{\mu 2},$$

$$J_1 = \sum_{\mu=0}^{2n_2+n_1-1} \text{tr}(P_\mu - Q_\mu)^T (P_\mu - Q_\mu), \quad J_2 = \|W(j\omega) - W_m(j\omega)\|_F^2.$$

Для того чтобы минимизировать функционал J_1 , необходимо найти точное или приближенное решение эквивалентного матричного алгебраического уравнения [2]

$$(6) \quad LG = Q.$$

Функционалы J_1, J_2 показывают меру отклонения показателей качества управления системы от аналогичных показателей качества эталонной модели. При этом нижняя граница значений функционала на множестве Σ является положительным вещественным числом, не обязательно малым. Задача адаптивного синтеза регулятора заданной структуры сводится к следующим двум задачам:

$$G = [G_1^* \quad G_2^*] = \arg \min J_1,$$

$$G = [G_1^* \quad G_2^*] = \arg \min J_2.$$

Точное решение уравнения (6) существует только в случае выполнения условий полной адаптируемости по выходу [21]. Рассмотрим приближенное решение поставленной задачи методом наименьших квадратов МНК.

2.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРОВ С ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ И КРИТЕРИИ АДАПТИРУЕМОСТИ

Теорема 1. [21]. Пусть объект управления полностью управляем и наблюдаем, передаточные функции объекта и регулятора, эталонных моделей объекта и регулятора, соответствующие минимальным реализациям в виде $(A, B, C), (A_{ст}, G_1, C_c, G_2)$, – строго правильные дробно-рациональные функции, не имеющие кратных полюсов и полюсов в правой полуплоскости. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Необходимые условия минимума функционалов J_1, J_2 совпадают и имеют вид

1) либо $LG - Q = 0$,

2) либо $(LG - Q) \neq 0$, но $L^T(LG - Q) = 0$.

2. Если решение первого уравнения существует и единственно, то необходимое условие минимума является и достаточным.

3. Оптимальный алгоритм настройки регулятора для функционалов J_1, J_2 имеет вид

$$(7) \quad G_{opt} = L^+ Q,$$

где знак «+» означает псевдо-инверсную по Муру – Пенроузу матрицу [2]. Для матриц адаптируемости L полного ранга псевдоинверсная матрица вычисляется по формуле

$$L^+ = (L^T L)^{-1} L^T.$$

Критерии адаптируемости основного контура по выходу определяется следующей теоремой.

Теорема 2. [21]. *Необходимыми и достаточными условиями полной адаптируемости основного контура по выходу являются условия $T(Q) \subseteq T(L)$, $Z(L) = 0$, где T обозначает образ матрицы, Z – ее ядро. Необходимыми и достаточными условиями частичной адаптируемости основного контура по выходу является условие $Z(L) = 0$. Это условие выполняется для матриц L полного ранга.*

Краткий анализ позволяет увидеть в структурных свойствах неадаптивной и адаптивной систем много общего: похожее деление свойства на отдельные виды, возможность формирования критериев выполнения свойств в виде ранговых критериев матриц специального вида, инвариантность критерия к преобразованию подобия.

Следствие. Остаточное значение функционала настройки J_1 определяется формулой $J_{1min} = \text{tr}[Q^T(I - LL^+)Q]$. Это выражение определяет зависимость остаточного значения функционала в зависимости от значений матриц адаптируемости, которые зависят в свою очередь от переменных параметров объекта.

Пример 1. Система управления по углу атаки самолета является одной из основных подсистем автопилота. Основной контур управления состоит из объекта (самолет) и регулятора (автопилот), охваченных единичной отрицательной обратной связью. Целью управления является слежение за заданным значением угла атаки. Передаточные функции объекта и регулятора, а также эти функции для эталонной модели разомкнутого контура имеют вид

$$P(s) = \frac{k_p}{T_p^2 s^2 + 2T_p \zeta_p s + 1}, \quad K(s) = \frac{k_r s + k_i}{s},$$

$$P_m(s) = \frac{k_{pm}}{T_{pm}^2 s^2 + 2T_{pm} \zeta_{pm} s + 1}, \quad K_m(s) = \frac{k_{rm} s + k_{im}}{s}.$$

Синтез параметров регулятора k_{rm}, k_{im} для заданных значений параметров объекта $k_{pm}, T_{pm}, \zeta_{pm}$ на номинальном режиме функционирования системы управления может быть выполнен многими способами: методом фильтров Баттерфорса, частотным методом, методом корневого годографа, модельного прогнозирующего управления, линейного квадратичного регулятора, методом размещения полюсов, методами робастного управления – см. [12, раздел 2.6] и подраздел 1.2.4] Рассмотрим случай, когда переменными являются три параметра объекта:

$$\Sigma = \{k_p, T_p, \zeta_p : \underline{k}_p \leq k_p \leq \bar{k}_p, \underline{T}_p \leq T_p \leq \bar{T}_p, \\ \underline{\zeta}_p \leq \zeta_p \leq \bar{\zeta}_p, k_p \neq 0\},$$

а настраиваются два параметра ПИ-регулятора k_r и k_i . Полиномиальное уравнение настройки регулятора имеет вид

$$k_p [k_r (T_{pm}^2 s^3 + 2\zeta_{pm} T_{pm} s^2 + s) + k_i (T_{pm}^2 s^2 + 2\zeta_{pm} T_{pm} s + 1)] = \\ = k_{pm} [k_{rm} (T_p^2 s^3 + 2\zeta_p T_p s^2 + s) + k_{im} (T_p^2 s^2 + 2\zeta_p T_p s + 1)], \\ G^T = [k_r \quad k_i], \quad LG = Q.$$

Матрица L и вектор адаптируемости Q задаются формулами:

$$L = k_p \begin{bmatrix} T_{pm}^2 & 0 \\ 2k_r T_{pm} \zeta_{pm} & T_{pm}^2 \\ 1 & 2k_r T_{pm} \zeta_{pm} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = k_{pm} \begin{bmatrix} k_{im} T_p^2 \\ 2k_{rm} \zeta_p T_p + T_p^2 k_{im} \\ k_{rm} + 2k_{im} \zeta_p T_p \\ k_{im} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (7) H_2 -оптимальный алгоритм настройки параметров ПИ-регулятора по идентифицированным параметрам объекта имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_r^* \\ k_i^* \end{bmatrix} &= k_p^{-1} k_{pm} \begin{bmatrix} 1 + 4T_{pm}^2 \zeta_{pm}^2 + T_{pm}^4 & 2T_{pm} \zeta_{pm} (1 + T_{pm}^2) \\ 2T_{pm} \zeta_{pm} (1 + T_{pm}^2) & 1 + 4T_{pm}^2 \zeta_{pm}^2 + T_{pm}^4 \end{bmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{bmatrix} T_{pm}^2 & 2T_{pm} \zeta_{pm} & 1 & 0 \\ 0 & T_{pm}^2 & 2T_{pm} \zeta_{pm} & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} k_{rm} T_p^2 & 2k_{rm} T_p \zeta_p + T_p^2 k_{im} & k_{rm} + 2k_{im} T_p \zeta_p & k_{im} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Эти алгоритмы обеспечивают стабильность динамических характеристик системы управления самолетом в условиях различных режимов полета. Предположим, что параметры T_p , ζ_p постоянны и меняется только один коэффициент усиления объекта. Нетрудно видеть, что алгоритм настройки $k_r^* = k_p^{-1} k_{pm}$ гарантирует тождественное равенство передаточных функций разомкнутого основного контура и его эталонной модели. В этом случае остаточное значение функционала настройки равно нулю, выполняются достаточные условия полной адаптируемости и основной контур обладает свойством полной адаптируемости по выходу. Настраиваемый основной контур «наследует» все заданные показатели качества эталонной модели. Настройка регулятора идеальна. Рассмотрим теперь общий случай, когда изменяются все три параметра объекта и настраиваются два параметра регулятора. Основной контур обладает свойством частичной адаптируемости по выходу, поскольку матрица адаптируемости L имеет максимальный ранг. Нетрудно убедиться в том, что эта матрица тёплицава. В этом случае остаточное значение функционала настройки – положительной число, значение которого (а значит и качество настройки) зависит от значений параметров объекта и оптимальных настроек регулятора. Чем больше разброс параметров объекта, тем качество настройки хуже. Настраиваемый основной контур «наследует» заданные показатели качества эталонной модели с ошибками, которые тем меньше, чем меньше остаточное значение функционала настройки J_1 . Настройка регулятора не идеальна, но на каждом допустимом режиме полета самолета она оптимальна. •

Адаптируемость является свойством структуры основного контура управления, которая характеризует потенциальную возможность системы управления сохранять свои динамические характеристики при настройке параметров системы управления под заданную эталонную модель системы управления при разбросе множества параметров объекта управления относительно параметров номинального (эталонного) режима системы управления. Анализ свойств матриц адаптируемости позволяет разработать методы ускорения вычислений для решения уравнений настройки регулятора. Было предложено несколько приемов, направленных на решение указанной задачи: использование взвешенного метода наименьших квадратов и канонических разложений матриц адаптируемости, применение рекуррентных соотношений для вычисления элементов матрицы адаптируемости и специальных алгоритмов, разработанных для обращения теплицевых матриц [28].

Решение задачи синтеза оптимальных алгоритмов настройки регулятора обладает отдельными преимуществами: это определенная универсальность (можно настраивать как объекты с одним входом, так и со многими входами и выходами), простота вычислительной реализации и наличие стандартного программного обеспечения для метода наименьших квадратов. Решение задачи нахождения оптимальных настроек регулятора при выполнении условий адаптируемости существует, единственно и задается аналитическим выражением; найденный минимум является глобальным, для его отыскания не нужны хорошие начальные условия. В рамках оптимального синтеза алгоритмов настройки регулятора имеются следующие ограничения:

- необходимость предварительного синтеза неявной эталонной модели;
- фиксированная структура регулятора;
- отсутствие аналитических оценок устойчивости и робастности регулятора.

В [28] описаны обобщения подхода синтеза оптимальных алгоритмов настройки регуляторов для дискретных линейных систем, для оптимальной настройки каскадных ПИД-

регуляторов с применением компенсации возмущений, с применением линейных матричных неравенств, с обучением эталонной модели на основе ассоциативного поиска, с едиными рекуррентными алгоритмами идентификации параметров объекта и настройки параметров регулятора. Предлагаемые алгоритмы оптимальной настройки позволяют найти оптимальные параметры настройки многоконтурного ПИД-регулятора для билинейных объектов управления [22]. В процессе настройки регулятора важно контролировать запасы устойчивости. Открытым остается вопрос: как получить максимальные области устойчивости для множества значений параметров объекта управления из области их допустимых значений Σ .

3. Адаптивные системы управления с эталонной моделью динамическими объектами

С начала зарождения БАСЭМ (Н.Р. Whitaker, 1958 г. [27]) им посвящено большое число публикаций [14]. Причиной такого внимания к данному классу адаптивных систем является конструктивность постановки задачи и строгость математического аппарата. Для анализа движения и для отыскания алгоритмов функционирования БАСЭМ, являющихся принципиально нелинейными нестационарными многосвязными динамическими системами, эффективно используется прямой метод Ляпунова [6, 9, 24].

Значительные диапазоны изменения динамических характеристик объектов управления даже при адаптивном управлении не позволяют обеспечить заданные требования к работе системы без целенаправленного изменения конструктивных параметров самого объекта, известного в литературе как параметрическое управление. Регулятор параметрического управления может использоваться совместно с традиционным регулятором координатного управления при решении задачи адаптивного управления нестационарным динамическим объектом. Адаптивные системы, в которых используются средства параметри-

ческого управления объектом, получили название адаптивных систем координатно-параметрического управления [10].

3.1. ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

Структурная схема (см. рис. 1.2.2) адаптивной системы координатно-параметрического управления включает основной контур и контур адаптации. Основной контур состоит из объекта управления и регулятора координатного управления (РКУ), который формирует координату управления $u(t)$. Вектор координат состояния объекта $x(t)$ управляется вектором $u(t)$ в условиях действия вектора внешних возмущений $f(t)$. Контур адаптации состоит из устройства адаптации и регулятора параметрического управления (РПУ). Регуляторы РКУ и РПУ решают основную задачу управления объектом.

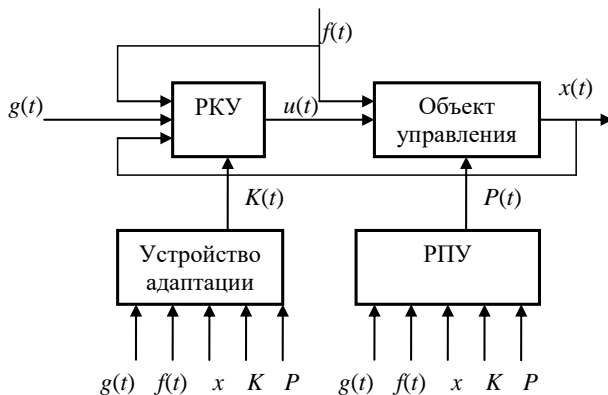


Рис. 1.2.2. Структурная схема беспоиcковой адаптивной системы управления

Представленную структуру адаптивной системы часто рассматривают как иерархическую структуру. В этом случае объект вместе с РКУ и РПУ составит первый уровень управления, а устройство адаптации – второй уровень. Различные уровни структуры адаптивной системы имеют различные цели управления, свои характерные задачи и особенности построения. Иерархический характер структуры адаптивной системы позво-

ляет разделить вопросы анализа и синтеза первого уровня – основного контура – и второго уровня – контуров перестраиваемых коэффициентов регулятора $K(t)$ и конструктивных параметров объекта $P(t)$. В случае разделения возникает возможность синтезировать основной контур независимо от уравнений движения второго уровня. При этом основной контур необходимо конструировать с учетом решения задач адаптации и дальнейшего подключения устройства адаптации и РПУ.

3.2. АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ БАСЭМ

Методика синтеза алгоритмов с использованием прямого метода Ляпунова устройства адаптации и РПУ в общем случае не отличаются друг от друга. Поэтому рассмотрим только синтез алгоритмов устройства адаптации.

Примем математическую модель объекта в виде

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = [A_0 + \Delta A(t)]x(t) + [D_0 + \Delta D(t)]\mu(t) + [C_0 + \Delta C(t)]f(t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^l$, $\Delta A(t)$, $\Delta D(t)$, $\Delta C(t)$ – матрицы параметрических возмущений. Для упрощения задачи будем считать, что $n = m$. Сигнал управления $\mu(t)$ формируется в РКУ с использованием матриц перестраиваемых коэффициентов $\Delta K(t)$, $\Delta N(t)$, $\Delta R(t)$, которые компенсируют параметрические возмущения.

Если обозначить

$$Y(t) = \Delta A(t) - \Delta K(t), \quad Z(t) = \Delta D(t) - \Delta N(t), \quad S(t) = \Delta C(t) - \Delta R(t)$$

и в качестве эталонной модели выбрать звено с уравнением

$$(9) \quad \frac{d}{dt} x_M(t) = A_0 x_M(t) + D_0 \mu(t) + C_0 f(t),$$

где $x_M \in \mathbb{R}^n$, то движение БАСЭМ по координате $\varepsilon(t) = x(t) - x_M(t)$ описывается уравнением

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = A_0 \varepsilon(t) + Y(t)x(t) + Z(t)\mu(t) + S(t)f(t).$$

В [9] доказано, что при $t = t_0$ неопределенных и при $t > t_0$ медленно изменяющихся параметрических возмущениях имеет место устойчивость нулевого решения уравнения (10) в про-

странстве $\{\varepsilon, Y, Z, S\}$, если алгоритмы перестройки выбирать на основе функции Ляпунова $V = \kappa \varepsilon^T P \varepsilon + \text{tr}(Y^T Y + Z^T Z + S^T S)$, $\kappa = \text{const}$, P – числовая симметрическая положительно определенная матрица.

При выборе интегральных алгоритмов вида

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta k_{ij}(t) &= \kappa \sigma_i(t) x_j(t), \quad \frac{d}{dt} \Delta n_{ij}(t) = \kappa \sigma_i(t) \mu_j(t), \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \frac{d}{dt} \Delta r_{im}(t) &= \kappa \sigma_i(t) f_m(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}, \end{aligned}$$

где $\sigma(t) = P \varepsilon(t)$, и производная выбранной функции Ляпунова отрицательна. Алгоритмы адаптации (11) обеспечивают устойчивость нулевого решения уравнения (10). Если функции $g(t)$ и $f(t)$ содержат достаточное число гармонических компонентов, то возможно идентифицировать при работе БАСЭМ параметры объекта управления [10].

Алгоритмы (11) являются основой для их модификации. В частности, добавление в интегральный алгоритм вида (11) члена, пропорционального перестраиваемому параметру регулятора, например $\Delta K(t)$, может дать лучший результат при быстро изменяющихся параметрических возмущениях объекта.

При малых значениях управления $u(t)$ в случае, когда внешнее возмущение $f(t)$ не доступно измерению, может наблюдаться неограниченное увеличение перестраиваемых коэффициентов регуляторов. Для предотвращения такого увеличения в интегральные алгоритмы (11) вводят зоны нечувствительности [11].

В алгоритмах (11) величина коэффициента усиления κ произвольна. При слишком больших значениях κ переходные процессы в контурах настройки коэффициентов становятся неудовлетворительными. С увеличением κ настраиваемые коэффициенты регуляторов принимают большие значения при малых сигналах на входах интеграторов в (11). Перестраиваемые коэффициенты имеют конструктивные ограничения, поэтому при ограниченных параметрических возмущениях нет необхо-

димости иметь большие коэффициенты в алгоритмах адаптации регуляторов.

В пределе при $\kappa \rightarrow \infty$ алгоритмы (11) преобразуются в релейные алгоритмы вида $\Delta k_{ij}(t) = \overline{\Delta k_{ij}} \text{sign}[\sigma_i(t)x_j(t)]$, $i, j = \overline{1, n}$, где $\overline{\Delta k_{ij}}$ – постоянные величины, выбираемые из условий ограничения $|\Delta a_{ij}(t)| \leq \overline{\Delta k_{ij}} \quad \forall t \geq t_0$. БАСЭМ вида (8), (9) только с релейными алгоритмами адаптации не может решать задачу идентификации параметров объекта, так как релейные алгоритмы не содержат интеграторов, которые играют роль запоминающих устройств.

При использовании только релейных алгоритмов адаптации в БАСЭМ возникает скользящий режим относительно движения эталонной модели, существующий при ограниченных параметрических возмущениях и срывающийся при $|\Delta a_{ij}(t)| > \overline{\Delta k_{ij}}$. Целесообразно совместное использование интегральных (11) и релейных алгоритмов адаптации [10]. В этом случае улучшаются динамические свойства процессов настройки коэффициентов и динамическая точность движения.

3.3. АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ БАСЭМ, ГАРАНТИРУЮЩИЕ ДИНАМИЧЕСКУЮ ТОЧНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ

Имеется ряд существенных недостатков, к которым относятся зависимость динамической точности движения БАСЭМ от интенсивности и спектрального состава входных воздействий, от скоростей изменения параметрических и координатных возмущений, от необходимости информации о векторе состояния системы. Все эти факторы приводят к малой предсказуемости динамики движения БАСЭМ. Наряду с этим многие динамические объекты, работающие в условиях неопределённости возмущений, требуют высокой динамической точности движения.

Известно, что параллельно с БАСЭМ для управления нестационарными объектами активно развивался класс систем с переменной структурой (СПС) [7]. В классе СПС уменьшается зависимость работы системы от входных воздействий;

от скоростей изменения параметрических и координатных возмущений. В СПС существуют и недостатки: требование ограниченного диапазона изменения параметрических возмущений и разрывное изменение коэффициентов регулятора, что может негативно сказываться на активизации неучтённой динамики объекта.

Релейные алгоритмы адаптации приблизили динамику БАСЭМ к положительным свойствам, характерным для СПС. Однако остаётся разрывность изменения коэффициентов. В [15] предлагается алгоритм функционирования БАСЭМ, который использует возможность сочетания принципов построения БАСЭМ и СПС с целью совмещения положительных и нивелирования отрицательных свойств каждого из этих принципов. При некотором добавлении требований к исходной информации в БАСЭМ удаётся в классе непрерывных законов изменения настраиваемых параметров регулятора добиться свойств, характерных для СПС.

Рассмотрим вариант объекта управления (8), который описывается уравнением вида

$$(12) \quad \frac{dx(t)}{dt} + A_0 x(t) = B_0 g(t) + d(t) + S(t),$$

где $d(t) = -\Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)g(t) + f(t)$. Вектор $S(t)$ предназначен для компенсации координатных и параметрических возмущений. Векторы $x(t)$, $g(t)$ предполагаются доступными измерению; элементы матриц параметрических возмущений и компоненты векторов $g(t)$, $f(t)$ – непрерывно-дифференцируемые функции. Требуется отыскать алгоритмы изменения компонентов вектора $S(t)$ из условия компенсации влияния возмущающего вектора $d(t)$ на движение системы (12). Задача решена в [15] при условии, что компоненты вектора $d(t)$ не ограничены, но скорость их изменения ограничена.

Получены алгоритмы изменения компонентов вектора $S(t)$ в зависимости от доступной измерению информации, при которых движение $x(t)$ асимптотически сходится к движению эталонной модели $x_M(t)$ независимо от интенсивности и спектрального состава входных воздействий, от диапазонов изменения

параметрических и координатных возмущений, с предсказуемостью и высокой динамической точностью движения БАСЭМ:

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\kappa\sigma(t) - K \operatorname{sign}[y(t)], \text{ где } K - \text{диагональная матрица}$$

постоянных коэффициентов, $y(t) = d(t) - S(t)$.

Система (12) с полученным в [15] алгоритмом адаптации переходит в разряд систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. В такой системе возможно возникновение скользящего режима на одной или нескольких поверхностях разрыва.

3.4. ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫЕ АЛГОРИТМЫ БАСЭМ

Столь сильные свойства алгоритма адаптации для БАСЭМ с уравнением (12) аналитически получены при условии, что вектор $\operatorname{sign}[y(t)]$ доступен для измерения. Вектор $y(t)$ можно было бы получить по соотношению $y(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + A_0\varepsilon(t)$, однако, со-

гласно постановке задачи, вектор $\frac{d\varepsilon}{dt}$ не является измеряемым.

С целью оценки вектора $\frac{d\varepsilon}{dt}$ на основе измеряемого вектора $\varepsilon(t)$

введено соотношение $\tau \frac{d}{dt}\xi(t) + \xi(t) = \varepsilon(t)$, где $\tau = \text{const} > 0$ –

известное малое число. В этом случае алгоритм адаптации примет вид

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\kappa P\xi(t) - K \operatorname{sign}[S(t)], \text{ где } S(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} + A_0\xi(t).$$

Поскольку векторы ξ и $\frac{d\xi}{dt}$ стали измеримыми, то векторы S

и $\operatorname{sign}(S)$ также стали доступными измерению, и полученный модифицированный алгоритм адаптации является реализуемым.

В [15] показано, что существует такой интервал значений $0 \leq \tau < \tau_0$, $\tau_0 = \text{const}$, при котором движение адаптивной системы асимптотически устойчиво в целом и стремится в ограниченную область в фазовом пространстве.

Модифицированный алгоритм адаптации конструктивно проще алгоритмов вида (11), область скользящего режима, как показывают результаты математического моделирования многих примеров, намного сужается. Но данный алгоритм имеет недостаток, выражающийся в требовании реализации при больших скоростях изменения коэффициентов объекта достаточно высокого коэффициента усиления дополнительного контура, что неблагоприятно отражается на динамике системы при нелинейном характере уравнений движения объекта и отдельных её блоков.

Целесообразно использовать комбинированный двухконтурный алгоритм адаптации, в котором первый контур реализует перестройку коэффициентов главной обратной связи по интегральным алгоритмам (11), а второй контур синтезирован по типу модифицированного алгоритма, но при наличии первого контура во втором уже не требуется иметь высокий коэффициент усиления. При действии на объект внешних возмущений второй контур адаптации решает задачу компенсации этих возмущений, что является преимуществом комбинированного управления.

Для реализации алгоритма второго контура адаптации требуется информация не только об $(n - 1)$ производных от ошибки $\varepsilon = x - x_M$, но и информация о её старшей n -й производной, что в теории управления обычно считается физически нереализуемой операцией. Теоретически эту проблему решает учёт отброшенных малых параметров в математической модели объекта, что соответствует увеличению порядка системы и, следовательно, приводит к физической реализуемости алгоритма адаптации. В [15] проведено исследование динамики системы для этого случая и показано, что система теряет свойство асимптотической устойчивости, но сохраняет свойство диссипативности, и дана оценка области, определяющей точность управления по координате ε .

В первом контуре при низком коэффициенте k адаптация происходит медленно и точность системы управления падает. Во втором контуре адаптации при тех же условиях требуется

иметь $k > |\mu_n|$, а $|\mu_n|$ может принимать при отсутствии первого контура адаптации большие значения. В случаях нарушения условия $k > |\mu_n|$ система может терять устойчивость.

Система с двумя контурами адаптации позволяет реализовать высокую точность управления при сравнительно низких коэффициентах усиления в обоих контурах. Алгоритм адаптации второго контура не имеет жестких ограничений на скорость изменения коэффициентов объекта и не требует информации о возмущении $f(t)$, а, следовательно, точность двухконтурной адаптивной системы весьма высокая. При комбинированном адаптивном управлении каждый контур адаптации дублирует функции другого контура, что повышает надёжность БАСЭМ.

В работе [16] решается задача построения адаптивной системы с нелинейной эталонной моделью с нелинейным исполнительным механизмом. В результате анализа системы на фазовой плоскости определены топология многолистной фазовой плоскости и особенности динамики топологии при действии параметрического возмущения, которое изменяет величину коэффициента, влияющего на устойчивость движения подсистемы. Определены диапазоны изменения этого коэффициента, при которых на фазовой плоскости могут возникать один или несколько предельных циклов. Предлагается структура БАСЭМ, которая позволяет устранить режим автоколебаний и обеспечить устойчивость движения исходной системы. Контур адаптации содержит нелинейную эталонную модель, которая полностью совпадает с исходной нелинейной системой с номинальными параметрами, и алгоритмы адаптации вида (11). Результаты анализа работоспособности адаптивной системы подтвердили принципиальную целесообразность предлагаемого подхода к синтезу нелинейных адаптивных систем рассматриваемого типа.

4. *N*-синтез неявной эталонной модели

После решения задачи идентификации линейной модели объекта (см. ниже) возникает задача синтеза регулятора (неявной эталонной модели), обеспечивающего выполнения ряда

требований к качеству работы замкнутой системы, которые далее будем называть *инженерными*. Главные из этих требований:

- а) точность стабилизации (слежения) при действии ограниченных внешних возмущений;
- б) быстродействие;
- в) запасы устойчивости, характеризующие робастность замкнутой системы.

Причем последнее требование целиком определяет возможность использования синтезированного регулятора на практике. Примером классического метода синтеза одномерных регуляторов, гарантирующего эти показатели, является известный *метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик* (ЛАЧХ) [4]. Этот метод показал свою высокую практическую эффективность на протяжении последних 70 лет (для минимально-фазовых нейтральных объектов). В работах А.Г. Александрова [1] на основе модального управления предложено аналитическое обобщение метода ЛАЧХ для одномерных объектов (в том числе для неминимально-фазовых и неустойчивых). Вместе с тем для многомерных объектов метод ЛАЧХ и метод [1] имеют часто непреодолимые трудности. Поэтому ниже рассматривается подход к синтезу по инженерным критериям качества, основанный на использовании идей и техники H_∞ -оптимизации, которая позволяет ряд отдельных задач (в частности по запасам устойчивости [19] или точности [20]) решать с точностью до необходимых и достаточных условий. Элементы H_∞ -теории изложены в учебном пособии [12, подразделы 2.1.5 и 2.2.2] и в книге [9].

Постановка задачи. Рассмотрим линейную идентифицированную модель объекта управления (1). Матрицы объекта A, B_1, B_2, C известны; пара матриц (A, B_2) управляема, а пара (C, A) наблюдаема.

Пусть объект (1) замкнут стабилизирующим динамическим регулятором по выходу:

$$(13) \quad \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u, \quad u = C_r x_r + D_r y,$$

где $z_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ – вектор состояния регулятора размерности $n_r \leq n$; A_r, B_r, C_r, D_r – матрицы чисел соответствующего размера.

Компоненты возмущения $w(t)$ – полигармонические функции:

$$(14) \quad w_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}.$$

Здесь амплитуды $w_{ik} \geq 0$, начальные фазы ψ_{ik} и частоты ω_k неизвестны. Возмущение ограничено в следующем смысле:

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \leq w_i^*, \quad i = \overline{1, m_3},$$

где $w_i^* > 0$, $i = 1, \dots, m_3$, – заданные числа.

Модель внешнего возмущения (14), (15) покрывает все непрерывные кусочно-гладкие воздействия, реализуемые на практике.

Рассмотрим инженерные показатели качества подробнее.

1. Ошибки по регулируемым переменным определим соотношениями [1]: $y_{i, st} = \sup_{t \geq t_p} |y_i(t)|$, $i = \overline{1, m_2}$.

2. Время регулирования t_p : время, начиная с которого выполняются условия [1]: $|y(t) - \limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)|| \leq 0,05$, $i = \overline{1, m_2}$.

3. Замкнутая система (1), (13) обладает радиусом запасов устойчивости r по выходу (входу) объекта, если выполняется матричное частотное неравенство [19]:

$$(16) \quad [I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty),$$

где $0 < r \leq 1$, $W(s)$ – передаточная матрица системы (1), (13), разомкнутой по выходу $W(s) = -W_0(s)K(s)$ или входу $W(s) = -K(s)W_0(s)$ объекта. Здесь $W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B_2$ – передаточная матрица объекта по управлению; $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора.

В одномерном случае ($m_2 = m = 1$) неравенство (16) имеет следующую геометрическую интерпретацию. Годограф Найквиста $W(j\omega)$ не пересекает круг радиуса r с центром в критической точке $(-1, j0)$, как показано на рис. 1.2.3а. Это значит, что коэффициент усиления k в контуре рис. 1.2.3б можно изменять в пределах $(1 + r)^{-1} < k < (1 - r)^{-1}$ без потери устойчивости, что определяет запас устойчивости по модулю $L \geq 1/(1 - r)$. Запас

по фазе $\varphi \geq 2\arcsin(r/2)$ (при $k = 1$), что соответствует классическим понятиям запаса по фазе и модулю [12, подраздел 1.2.3].

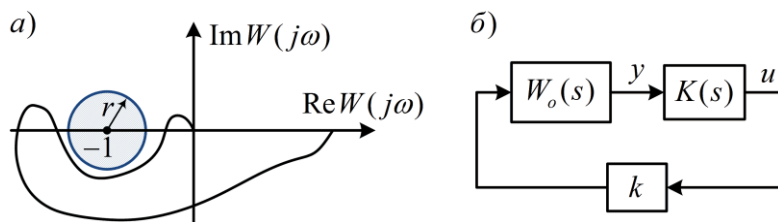


Рис. 1.2.3. а) Радиус запасов устойчивости; б) замкнутая система

В многомерном случае радиус запасов устойчивости имеет аналогичную физическую интерпретацию. Таким образом, радиус запасов устойчивости r служит косвенной мерой робастности замкнутой системы «объект–регулятор», хорошо зарекомендовавшей себя в инженерной практике.

Отметим, что *время регулирования*, определенное выше как время, начиная с которого каждая из регулируемых переменных войдет в 5%-ю «трубку» от своего установившегося движения, как правило, определяется степенью устойчивости σ замкнутой системы [4].

Время регулирования и σ связаны приближенным соотношением [4]: $t_p \leq 3/\sigma$, которое в инженерной практике служит для начальной оценки времени регулирования. Формальное требование к времени регулирования может быть выражено так:

$$(17) \quad \text{Re} \lambda_i(A_{cl}) \leq -\sigma, \quad i = \overline{1, n+n_r},$$

где $\sigma = 3/t_p^*$; t_p^* – желаемое время регулирования; A_{cl} – матрица замкнутой системы (1), (13):

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_r C & B_2 C_r \\ B_r C & A_r \end{bmatrix}.$$

Задача. Найти стабилизирующий регулятор (13), обеспечивающий требования:

- 1) к точности:

$$(18) \quad y_{i,sl} \leq \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $y_i^* > 0$ – заданные числа (желаемые ошибки); $\gamma > 0$ – заданное или достижимое число.

2) к радиусу запасов устойчивости (16), где r – заданное или достижимое число;

3) к времени регулирования $t_p \leq t_p^*$, где t_p^* – заданное или достижимое число (может быть заменено условием(17)).

Решение задачи синтеза на основе H_∞ -подхода. Переходя к преобразованию Лапласа при нулевых начальных условиях и исключая векторы состояния объекта и регулятора, представим уравнения (1), (13) как

$$y = W_0(s)u + W_1(s)w, \quad u = K(s)(y + w_1) = K(s)z_1, \quad z_2 = Q^{1/2}y,$$

где $W_1(s) = C(sI - A)^{-1}B_1$ – передаточная матрица объекта по возмущению; $w_1 \in \mathbb{R}^{m_2}$ – помеха измерения на входе регулятора, $z_1 \in \mathbb{R}^{m_2}$ – вектор фиктивных регулируемых переменных.

Здесь новый вектор $z_2 = Q^{1/2}y$ – вектор y , взвешенный с помощью диагональной матрицы $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$ с положительными элементами, выбираемыми ниже для обеспечения требования к точности (18).

Введем расширенный вектор внешних возмущений $\bar{w}^T = [w_1^T, w^T]$ и расширенный вектор регулируемых переменных $z^T = [z_1^T, z_2^T]$ и обозначим через $T_{z\bar{w}}(s)$ передаточную матрицу замкнутой системы, которая связывает эти векторы. Она будет иметь следующую структуру:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{z\bar{w}} \cdot \bar{w} = \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 w} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y w} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix},$$

где $T_{z_1 w_1}$, $T_{z_1 w}$, $T_{y w_1}$, $T_{y w}$ – передаточные матрицы замкнутой системы от w_1 к z_1 , от w к z_1 , от w_1 к y и от w к y соответственно.

Поясним ход доказательства главного результата этого раздела. Сначала учтем желаемое время регулирования. Собственные значения матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (13) должны удовлетворять неравенству (17). Заменяв матрицу A объекта на смещенную $\tilde{A} = A + \sigma I$, найдем смещенный регулятор, обес-

печивающий устойчивость смещенной замкнутой системы с матрицами $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$ смещенного регулятора.

Искомый же регулятор имеет матрицы [19, 20]

$$(19) \quad A_c = \tilde{A}_c - \sigma I, B_c, C_c, D_c.$$

Пусть регулятор с матрицами $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$ разрешает задачу минимизации H_∞ -нормы смещенной передаточной матрицы замкнутой системы (где A заменена на $\tilde{A} = A + \sigma I$):

$$(20) \quad \|T_{z\bar{w}}(-\sigma + j\omega)\|_\infty \leq \gamma,$$

где γ – заданное или минимизируемое число. Тогда каждый блок этой матрицы удовлетворяет аналогичному условию.

Отметим, что если решена смещенная проблема (20), то регулятор (13), (19) будет обеспечивать выполнение соответствующих частотных неравенств и для несмещенных передаточных матриц разомкнутой и замкнутой системы [19, 20].

Таким образом, разрешая смещенную задачу (20), имеем:

$$\|T_{z_1\bar{w}_1}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma, \quad \|Q^{1/2}T_{yw}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma.$$

Первое из этих неравенств может быть представлено в эквивалентном виде [19]: $[I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] \geq \gamma^{-2}I$, а это целевое неравенство (16), в котором $r = \gamma^{-1}$.

Второе неравенство имеет следующую эквивалентную форму:

$$(21) \quad T_{yw}^T(-j\omega)QT_{yw}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Имеет место следующее утверждение [24].

Лемма. Пусть выполнено частотное неравенство (21). Тогда ошибки по регулируемым переменным устойчивой системы (1), (13) при действии входного сигнала из класса (14), (15) удовлетворяют неравенствам

$$q_i y_{i,st}^2 \leq \gamma^2 \left(\sum_{j=1}^{m_2} w_j^* \right)^2, \quad (i = \overline{1, m_2}), \quad \text{где}$$

w_j^* – границы компонент внешних возмущений из неравенств (15).

Если элементы матрицы Q выбирать из равенств

$$(22) \quad q_i = \left(\sum_{j=1}^{m_3} w_j^* \right)^2 / (y_i^*)^2, \quad i = \overline{1, m_2},$$

то из неравенств леммы приходим к целевым неравенствам (18).

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Регулятор (13), (19) разрешает задачу, если весовые коэффициенты матрицы Q в смещенной H_∞ -проблеме (20) выбраны из равенств (22). При этом радиус запасов устойчивости $r = 1/\gamma$, где γ здесь и в неравенствах (18) есть реализовавшееся значение при решении задачи (20).

Физика радиуса запасов устойчивости. Покажем, что матричное частотное неравенство (16) имеет важное следствие, если размыкание осуществлять не по всем выходам, а по любому i -му. Обозначим такую передаточную функцию разомкнутой системы через $w_i(s)$, а передаточную функцию, связывающую i -ю компоненту вектора w_1 с i -й компонентой вектора z_1 (остальные входы нулевые) – $t_i(s)$. Этому соответствует структурная схема левой части рис. 1.2.4, где $\tilde{w}(s)$ представляет передаточную функцию, полученную путем замыкания всех обратных связей, кроме i -й.

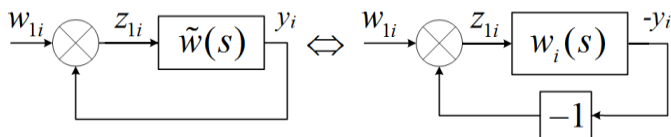


Рис. 1.2.4. Замкнутая система с i -й обратной связью

Правая часть рис. 1.2.4 представлена в эквивалентном виде, где очевидно, что $w_i(s) = -\tilde{w}(s)$. Таким образом, передаточные функции $t_i(s)$ и $w_i(s)$ связаны известным соотношением [4] $t_i(s) = 1/(1 + w_i(s))$. С другой стороны эта функция является i -м диагональным элементом $T_{z_1 w_1}$, откуда для ее i -го диагонального элемента можно записать $|t_i(j\omega)| \leq \gamma$ или $t_i(-j\omega)t_i(j\omega) \leq \gamma^2$, что при обозначении $r = 1/\gamma$ и с учетом связи $t_i(s)$ с $w_i(s)$ окончательно приводит к скалярному аналогу (16), откуда следует [19]:

Теорема 4. Пусть выполнено матричное частотное неравенство (16), тогда годограф Найквиста системы (1), (13), разомкнутой по i -му выходу объекта, не пересекает круга радиуса r с центром в критической точке $(-1, j0)$.

Подчеркнем, что радиус запасов устойчивости теоремы 4 всегда допускает экспериментальное определение на основе реального физического эксперимента [1, 4], что крайне важно для практических приложений. Если разомкнутая система на рис. 1.2.4 устойчива, то можно непосредственно строить годограф Найквиста $w_i(j\omega)$. В противном случае снимаются частотные характеристики системы рис. 1.2.4 в замкнутом состоянии, а именно $t_i(j\omega)$. В этом случае $r = 1/\|t_i\|_\infty$ [1].

Заметим, что чрезмерное увеличение степени устойчивости σ ведет к резкому падению радиуса запасов устойчивости [19] и, как следствие, большим выбросам в переходной функции замкнутой системы, что недопустимо на практике (аналог эффекта всплеска – см. [12, подраздел 2.1.3]). Поэтому в алгоритме синтеза необходимо использовать принцип постепенного увеличения σ .

5. Заключение

Материал настоящего раздела следует рассматривать как предназначенный исключительно для первоначального знакомства с адаптивными системами управления. В данном разделе не затронуты вопросы влияния ошибок идентификации на точность оптимальной настройки параметров регулятора (см. раздел 1.3), не рассматривается стохастическая теория адаптивного управления. Интерполяция матричных полиномов в подразделах 1.2.2 и 1.2.3 настоящего раздела может быть выполнена также с помощью аппарата искусственных нейронных сетей (см. раздел 4.3). Заинтересованному читателю можно рекомендовать монографии и учебники [2, 3, 6, 7, 9, 19–20] для продолжения более углубленного изучения теории и методов проектирования адаптивных систем управления.

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВ А.Г. *Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию*. I, II // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №5. – С. 27–42; – 2017. – №6. – С. 3–17.
2. АЛЬБЕРТ А. *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*. – М: Наука, 1977. – 223 с.
3. БАХТАДЗЕ Н.Н., ЯДЫКИН И.Б., ЛОТОЦКИЙ В.А., МАКСИМОВ Е.М., САКРУТИНА Е.А., ПЕСИКОВ Э.Б. *Stability Conditions for Multimodal Power and Process Plants* // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Vol. 48, No. 3. – С. 1248–1253.
4. ВОРОНОВ А.А. *Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем*. – М.: Энергия, 1980. – 312 с.
5. ГУДВИН Г.К., ГРЕБЕ С.Ф., САЛЬГАДО М.Э. *Проектирование систем управления*. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010. – 911 с.
6. ДОРФ Р., БИШОП Р. *Современные системы управления*. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2012. – 832 с.
7. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В. *Системы автоматического управления с переменной структурой*. – М.: Наука, 1967.
8. КРАСОВСКИЙ А.А., БУКОВ В.Н., ШЕНДРИК В.С. *Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами*. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
9. *Методы классической и современной теории автоматического управления : Учебник в 3-х т. Т. 2. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления* / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.
10. ПЕТРОВ Б.Н., РУТКОВСКИЙ В.Ю., ЗЕМЛЯКОВ С.Д. *Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами*. – М.: Наука, 1984. – 224 с.
11. ПЕТРОВ Б.Н., РУТКОВСКИЙ В.Ю., КРУТОВА И.Н., ЗЕМЛЯКОВ С.Д. *Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления*. – М.: Машиностроение, 1972. – 260 с.

12. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие.* – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
13. РАЙБМАН Н.С., ЧАДЕЕВ В.М. *Адаптивные модели в системах управления.* – М.: Советское радио, 1967.
14. *Справочник по теории автоматического управления* / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
15. РУТКОВСКИЙ В.Ю., ГЛУМОВ В.М., СУХАНОВ В.М. *Физически реализуемый алгоритм адаптивного управления с эталонной моделью* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №8. – С. 96–108.
16. РУТКОВСКИЙ В.Ю., ГЛУМОВ В.М. *Особенности динамики адаптивной системы управления с нелинейной эталонной моделью. I и II* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №4. – С. 92–105; № 5. – С. 83–95.
17. ФОМИН В.Н., ФРАДКОВ А.Л., ЯКУБОВИЧ В.А. *Адаптивное управление динамическими объектами.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
18. ЦЫПКИН Я.З. *Основы теории обучающихся систем.* – М.: Наука, 1968. – 252 с.
19. ЧЕСТНОВ В.Н. *Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №3. – С. 199–205.
20. ЧЕСТНОВ В.Н. *Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №10. – С. 170–185.
21. ЯДЫКИН И.Б. *Оптимальный адаптивный синтез регуляторов заданной структуры* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №5. – С. 161–174.
22. ЯДЫКИН И.Б., ЧАЙКОВСКИЙ М.М. *Оптимальная настройка ПИД-регуляторов для многосвязных билинейных объектов управления* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №1 – С. 130–146.
23. ASTROM K.J., HAGGLUND T. *Advanced PID Control.* – ISA – The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006. – 461 p.

24. CHESTNOV V.N., SHATOV D.V. *Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and H_∞ Optimization Procedures* // Proc. of IFAC European Control Conference (ECC-2018), Cyprus, Limassol. – 2018. – P. 2511–2516.
25. LANDAU I.D., M'SAAD M., LOZANO R., KARIMI A. *Adaptive Control Algorithms, Analysis and Application*. – Springer, 2011. – 585 p.
26. WITTENMARK B., ASTROM K. *Adaptive Control*. – Dover Publication, 2008. – 574 p.
27. WHITAKER H.P., JAMRON S., KESER A. *Design of the Reference Model Adaptive Control Systems for Aircraft* // Massachusetts Technological Institute. Instrumentation Lab. Report R-64.1958. – 108 p.
28. *Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)* – URL: <http://mathnet.ru/rus/person58233>.

1.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Бахтадзе Н.Н.¹, Карабутов Н.Н.², Лотоцкий В.А.³

1. Введение

Суть и смысл *идентификации* объекта (или системы) управления заключается в построении модели – «двойника», имитирующего его поведение (функционирование) и реакции на управляющие воздействия. Обычно точность такого отождествления оценивается *функцией потерь* – функционалом от разности выходных сигналов объекта и модели.

Еще 1960-е годы А.А. Фельдбаумом были выявлены принципиальные проблемы так называемого *дуального управления* – одновременных идентификации и управления (см. подраздел 1.3.9 и [34]). Невзирая на трудности решения задачи в общей постановке, для определенных классов систем на протяжении более чем полувека все же создавались специализированные методы и алгоритмы, позволяющие разрабатывать модели систем для вполне успешного (в смысле выбранных критериев) управления.

Будем понимать под *идентификацией системы* процесс построения ее математической модели с целью управления на основе обработки данных ее функционирования (реального либо экспериментального) с учетом априорной информации.

Такое определение выделяет следующие аспекты:

– Модель является *математическим* описанием функционирования системы, то есть принадлежит классу математических моделей (в отличие, например, от физических, натуральных симуляторов).

– Идентификационную математическую модель не следует считать тождественной математическому описанию функцио-

¹ Наталья Николаевна Бахтадзе, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., профессор (sung7@yandex.ru).

² Николай Николаевич Карабутов, «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва; д.ф.-м.н., профессор (kn22@yandex.ru).

³ Владимир Алексеевич Лотоцкий, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., профессор (valot@yandex.ru).

нирования объекта/системы, полученному на основе применения известных законов (физических, химических и т.д.), либо на основе расчетов (технологических, инженерных и т.п.). Хотя все перечисленные модели также являются математическими и могут лежать в основе идентификационной модели.

– Модель считается адекватной, если ее включение в систему обеспечивает управление, отвечающее всем заранее установленным требованиям.

– Под *данными функционирования* системы будем понимать как данные экспериментов, так и данные реальной деятельности системы.

Далеко не всегда система управления допускает проведение *активных экспериментов*. Кроме того, говорить об идентификации с целью исследований (а не управления) для широкого класса систем допустимо только на основе анализа данных их реального функционирования.

В работах последних лет наблюдается возрастающий интерес к использованию информации, получаемой на основе перманентно пополняемых знаний об управляемом объекте и системе управления. Под *знаниями* понимают закономерности, характеризующие функционирование системы. Модели, основанные на знаниях, относятся к классу интеллектуальных (см. главу 4).

Знания в данном контексте могут быть экспертными, технологическими, методологическими, эвристическими и т.д. Особый интерес представляют знания, извлекаемые на основе анализа исторических архивов – *индуктивные знания* [8]. Анализ данных мониторинга функционирования объекта может быть вербальным – при экспертно-статистической обработке информации с дальнейшей ее формализацией (например, с помощью нечетких моделей, см. об этом в разделе 4.2).

Независимо от методов, процедур, алгоритмов и новых сфер приложения (таких как сетевые модели, промышленный интернет вещей, цифровые двойники и т.п.) задачи теории идентификации и ее приложений остаются прежними. Также неизменны и основные ее разделы: структурная, параметрическая, непараметрическая идентификация; линейные и нелинейные задачи, идентификация систем с сосредоточенными и с распре-

деленными параметрами. Отдельный интерес представляют исследования по *идентифицируемости* (наблюдаемости параметров) систем и задачи *идентификационного синтеза* (синтеза системы управления с идентификатором в цепи обратной связи). Об этом говорится в следующих подразделах настоящего раздела.

Пусть известно, какой должна быть структура *оператора системы*: $y = \mathfrak{Z}(u)$, $u \in U$, $y \in Y$, где u – l -мерный входной сигнал из множества U , y – m -мерный выходной сигнал из множества Y , \mathfrak{Z} – оператор (или отображение), который ставит в соответствие каждому сигналу u на входе определенный сигнал y на выходе. Например, это соответствие может быть задано в виде дифференциального уравнения:

$$\left[A_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu} + \dots + A_1 \frac{d}{dt} + A_0 \right] y(t) = \left[B_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + B_1 \frac{d}{dt} + B_0 \right] u(t),$$

где A_i – вещественные матрицы размера $m \times m$, B_j – вещественные матрицы размера $m \times s$.

В таком случае задача идентификации сводится к оцениванию характеристик параметров объекта управления по наблюдениям входных и выходных переменных. В этом случае принято говорить об *идентификации в узком смысле*. Методы *параметрической идентификации* позволяют непосредственно определить коэффициенты передаточной функции или уравнения объекта. Если же структура оператора системы не известна, говорят об *идентификации в широком смысле*. В этом случае необходимо проводить предварительное исследование, в частности выявить наиболее информативные переменные, оценить степень нелинейности и степень стационарности объекта. Процедура определения структуры оператора называется *структурной идентификацией*.

Методы, применяемые для определения временных или частотных характеристик объектов, а также соответствующих характеристик случайных процессов, получили название *непараметрических методов идентификации*. По полученным характеристикам далее, посредством определенных процедур, могут

быть получены передаточная функция или уравнения модели объекта.

Выбор математической модели в значительной степени зависит от требуемой точности описания объекта, а именно, от определения возможности отнести его к классам *линейных* либо *нелинейных*, *стационарных* либо *нестационарных* объектов, от определения типа статистических зависимостей между компонентами векторных переменных (в многомерных системах), динамических свойств объекта и т.д.

В зависимости от типа описания информации о входных и выходных сигналах во временной либо частотной области выделяют соответственно *временные* и *частотные методы идентификации*.

Для формализации моделей управляемых систем при описании в пространстве состояний традиционно применяются дифференциальные уравнения в обыкновенных [28] и частных (см. раздел 3.1) производных. Возможна формализация и посредством других средств, например: операторные уравнения, алгебраические уравнения, интегральные и интегродифференциальные уравнения, нечеткие продукционные, семiotические, лингвистические модели, марковские цепи, передаточные функции, частотные характеристики, весовые функции, графы и др.

2. Эволюция методов идентификации

Термин «идентификация» был введен Лофти Заде («отцом» нечеткой логики – см. раздел 4.2) в 1956 г. [61]. Однако к этому моменту исследования в данном направлении развивались уже в течение почти сорока лет.

Задача идентификации является одной из базовых задач теории управления (см. введение В.1). Она является одной из определяющих для реализации цели управления определенной системой. В то же время идентификация и идентификационный синтез – в общем случае очень сложно разрешаемые проблемы. Возможно, именно поэтому совокупность методов и алгоритмов идентификации, а также результаты исследований по их реализуемости составили отдельную теорию, первоначальное пред-

ставление о спектре которой можно получить по работам [21, 30, 36, 38, 53].

В общей постановке задача идентификации заключается в определении оператора, «хорошо описывающего» функционирование системы в смысле выбранного критерия.

Если считать, что структура такого оператора известна, то задачу определения оператора можно интерпретировать как *обратную задачу динамики*. В задачах подобного рода решение может не существовать, быть не единственным и может быть неустойчивым по отношению к погрешностям измерения исходных данных. Такие задачи относятся к классу некорректно поставленных. Для получения единственного устойчивого приближенного решения используются различные *методы регуляризации*. Альтернативным подходом является именно идентификация – построение и настройка моделей объектов управления по данным их функционирования

Одним из первых среди известных методов идентификации считается *метод Прони* [55]. Метод состоит в представлении наблюдаемого процесса (выхода объекта управления или возмущения) в виде комплексного экспоненциального ряда с последующим восстановлением параметров комплексных экспонент на основе конечного числа значений сигнала на равномерной временной либо пространственной сетке отсчетов. Далее возможно получить значения спектральной и пространственной плотности исследуемого сигнала. Автору этого метода – Г. Ришу де Прони – принадлежит, кстати, идея прообраза компьютерных вычислений. А предложенный им метод параметрической идентификации находит применение и в наши дни, когда, наконец, вычислительные трудности могут быть преодолены. Однако в своей первоначальной формулировке метод являлся неустойчивым к ошибкам наблюдений. Проблема разрешилась, когда был создан *метод наименьших квадратов* (МНК).

В основе МНК лежит замена значений измерений так называемыми «модельными» значениями, которые находятся из условия минимума квадратичной функции разности модельных значений и реальных измерений («невязки»). Формулировки МНК были предложены в первом десятилетии XIX века практически одновременно А. Лежандром, К. Гауссом и Р. Эдрейном.

К. Гаусс привел вероятностное обоснование МНК, что, в частности, стало фундаментом теории *оптимального оценивания* (см. также [28] и раздел 1.1). В последующем интерпретация возмущений и ошибок наблюдений как случайных величин открыла страницу статистического подхода в теории идентификации. Правда, Гаусс замечает, что «принцип (МНК) ... может рассматриваться ... даже независимо от теории вероятностей» (вспомним об этом, когда будем говорить ниже о современных методах идентификации).

Далее был сформулирован метод П. Лапласа для определения оценок параметров, основанный на минимизации суммы модулей ошибок невязки выходных переменных объекта и настраиваемой модели. В последующих исследованиях Лаплас исследует вероятностное обоснование метода наименьших квадратов на основе нормального закона. Дальнейшее развитие теоретического обоснования МНК принадлежит А.А. Маркову.

С 1920-х гг. начинается «статистическая эра» в идентификации. Однако методы и алгоритмы идентификации систем автоматического управления вплоть до конца 50-х гг. в основном были сосредоточены на исследованиях реакций систем на определенные управляющие (тестовые) воздействия (ступенчатое, гармоническое и т.д.) [38]. Практическое применение этих методов было довольно ограниченным, как правило, из-за требований линейности, стационарности, нормальности распределений. К тому же, как правило, исследуемые системы были скалярными, что также мало соответствует адекватной математической интерпретации широкого класса реальных объектов автоматического управления.

Знаковым считается 1960 год, когда Рудольф Калман представил описание системы управления в пространстве состояний и основ оптимальной фильтрации [52] (справедливости ради отметим, что исследования по оптимальной фильтрации проводились еще в 40-х годах А.Н. Колмогоровым и Н. Винером). Работы Р. Калмана и Р. Бьюси в 1960-х г. стали «детонатором» бурного развития методов теории рекуррентного (последовательного) оценивания. *Рекуррентные процедуры оценивания (фильтр Калмана – Бьюси)* оказались применимыми и для идентификации нестационарных процессов.

В 1965 году К. Острёмом [39] были предложены методы идентификации, основанные на минимизации критерия, зависящего от параметров модели, по своей статистической сути – методы *максимального правдоподобия*. Такие модели, известные из математической статистики как *ARMA (авторегрессионное скользящее среднее)* и *ARMAX (авторегрессионное скользящее среднее со входом)*, составляют основу *метода ошибки предсказания*. Такой подход к построению идентификационных моделей продемонстрировал преимущества метода максимального правдоподобия (ММП) над МНК, в частности, важен тот факт, что оценки ММП не могут быть существенно улучшены.

Кроме того, методы идентификации, использующие *квадратичный критерий качества* (когда оценки неизвестных параметров доставляют минимум какому-либо квадратичному функционалу невязки – разности выходов объекта и модели для множества значений входов на заданном интервале времени), чувствительны к отклонениям закона распределения от нормального. Известно также, что МНК утрачивает эффективность в условиях различных выбросов, грубых ошибок, негауссовских помех с тяжелыми хвостами.

Было показано, что оценки максимального правдоподобия, вообще говоря, могут быть смещёнными, но являются состоятельными, асимптотически эффективными и асимптотически нормальными [12].

Оказалось, что ММП дает хорошие результаты, если к анализу данных применяется *байесовский подход* (при котором вероятность интерпретируется как мера неопределенности знаний об исследуемом объекте, а не как случайность). Таким образом, байесовские оценки могут быть рассмотрены как оценки максимального правдоподобия с ограничениями [6]. Переход от априорной информации, представленной в виде априорного распределения, к апостериорной информации с учетом данных наблюдений обеспечивает теорема Байеса.

Казалось, глобальные трудности применения МНК, связанные с ограниченностью вычислительных возможностей, отодвинуты на второй план. В период 1970–90 гг. было разработано большое количество *рекуррентных алгоритмов идентификации*, как «частотных», так и «временных» (использующих пред-

ставление сигналов в частотной и временной областях соответственно). Эти методы были направлены на получение описания максимально «точного» описания функционирования системы. Начинает рассматриваться проблема *сходимости* к «точным параметрам» и интенсивно исследуются связанные с этим вопросы *идентифицируемости* систем и статистические свойства оценок. Появляются *градиентные и псевдо-градиентные методы, поисковые, алгоритмы случайного поиска, методы координатного спуска*, методы стохастической аппроксимации [54] (*под стохастической аппроксимацией* в общей постановке понимают последовательный способ улучшения оценки с использованием на каждом шаге новых наблюдений и предшествующей оценки [10]).

Я.З. Цыпкиным создается *информационная теория идентификации* [36], определяющая алгоритмы идентификации, оптимальные для различных классов объектов, для чего вводится понятие *оптимальных на классе функций потерь*. Получили широкое развитие *методы нахождения наилучшей аппроксимации системы* на определенном классе моделей.

Исследование Л. Льюнгом [21] смещения и ошибки дисперсии для оценивания передаточных функций объектов позволило подойти к идентификации с позиций задачи синтеза системы управления. Основная идея заключалась в таком определении параметров синтеза, чтобы получать модель, наилучшую в выбранном классе. Такой подход оказался перспективным для решения *задач идентификации в замкнутом контуре*.

Идентификационный (или не прямой) метод синтеза состоит в замене неизвестного параметра в законе управления полностью определенным объектом – эмпирическими оценками, вычисляемыми *идентификатором* в режиме реального времени. Идентификатор становится управляющим блоком по отношению к настраиваемому регулятору заданной структуры [5]. Исследования проблем идентификационного синтеза и задачи идентификации в условиях неопределенности, проблемы идентифицируемости составляли основные направления исследований в последующий период вплоть до настоящего времени.

Неопределенность в описании объекта из заданного класса определяется в общем случае двумя составляющими [6]:

неопределенностью объекта управления и неопределенностью действующих возмущений. Возможны различные способы описания и снижения неопределенности объекта.

Для снижения неопределенности объектов с *интервальной неопределенностью* (когда о неизвестном параметре известен только диапазон его возможных значений) используют средства *интервального анализа* [15] и *гарантированного оценивания*, основанного на методе эллипсоидов [22].

В рамках статистического описания неопределенности принципиальное значение имеет тот факт, что функционалы от эмпирического распределения с увеличением объема выборки наблюдений сближаются с соответствующими «теоретическими» значениями, что позволяет состоятельно оценивать характеристики объекта методом подстановки и его модификациями. В *методе подстановки* в качестве оценки параметра выбирается соответствующее эмпирическое распределение. К оценкам подстановки относятся, например, оценки максимального правдоподобия [3], *M-оценки Хьюбера* [35], оценки *методом моментов* К. Пирсона

Современный период развития теории идентификации и ее приложений характеризуется как развитием описанных выше, так и появлением новых методов, основанных на машинном обучении, интеллектуальном анализе данных, создании баз знаний и других современных методах обработки информации.

3. Классы моделей и методов идентификации

Модели и методы идентификации могут быть классифицированы по различным принципам.

Различают [13] методы идентификации:

1. Активные и пассивные.

Активные методы характеризуются использованием тестовых воздействий, подаваемых на вход объекта/системы, – специально сформированных сигналов (детерминированных или стохастических). *Пассивные* методы основаны на обработке статистической информации реального функционирования объекта. При этом важно, чтобы частотный спектр входного воздействия

не был уже полосы частот динамической характеристики объекта.

2. *Оперативные и ретроспективные* – по признаку использования только оперативной либо еще и ретроспективной информации, а также по темпу обработки этой информации.

К основным **классам моделей** относятся (см. также введение к настоящему разделу):

- статические и динамические;
- линейные и нелинейные;
- детерминированные и стохастические;
- стационарные и нестационарные;
- дискретные и непрерывные;
- с сосредоточенными и с распределенными параметрами;
- описываемые в пространстве «вход–выход» и в пространстве состояний;
- параметрические и непараметрические.

Модели отождествляются с объектами соответствующих типов.

Статический объект характеризуется реакцией на входное воздействие, не зависящей от предыдущих значений входов и выходов – только от текущего значения входа/управления. Статической моделью может быть описано поведение объекта в установившемся режиме. *Динамический* объект описывается зависимостью от текущего входного воздействия, от значений входов в предыдущие моменты времени (до определенной глубины) и от соответствующих выходов.

Объект называется *линейным*, если его функционирование осуществляется в соответствии с принципом суперпозиции, то есть реакция объекта на линейную комбинацию двух входных воздействий равна той же линейной комбинации реакций данного объекта на каждое из воздействий. Если данное условие не выполняется, объект является *нелинейным*.

Объект считается *детерминированным*, если его выход однозначно определяется его структурой и входными воздействиями. То есть случайные воздействия и ошибки измерений не оказывают существенного влияния на результат. *Стохастическая* модель учитывает стохастический характер сигналов и случайные помехи на входе и на выходе объекта, а также его внутреннюю динамику.

Объект называется *стационарным*, если его реакция на одно и то же входное воздействие, приложенное в различные моменты времени, будет идентичной, то есть параметры такого объекта не зависят от времени. В противном случае объект является *нестационарным*.

Объект называется *непрерывным*, если значения его входов и выходов в течение конечного промежутка времени изменяются непрерывно. Непрерывные системы описывают, как правило, дифференциальными уравнениями. Объект называется *дискретным*, если значения его выходов и входов определены лишь в дискретные моменты времени. Для описания дискретных объектов обычно используются разностные уравнения.

Объект называется *объектом с сосредоточенными параметрами*, если его входные и выходные величины зависят от единственной переменной – времени. Описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями определенного порядка с начальными условиями, определяющими однозначность модели. Для модели *объекта с распределенными параметрами* характерна зависимость выхода не только от времени, но еще и от одной или нескольких пространственных координат. Такие модели описываются уравнениями в частных производных, включая начальные условия и граничные условия (см. раздел 3.1).

Модели *в пространстве «вход–выход»* представляют собой операторы, определяющие зависимости выхода от входного воздействия в виде переходных, весовых, передаточных функций. Модели *пространства состояний* описывают динамический портрет системы [28]. В качестве координат рассматривается n -мерный вектор состояния и $n - 1$ производных этой функции.

Параметрические модели представляют собой зависимости, в которых идентифицируемые параметры присутствуют в явном виде. Описываются дифференциальными уравнениями определенного порядка, а также уравнениями в пространстве состояний. Параметрами являются значения коэффициентов обыкновенных дифференциальных уравнений, начальных условий, коэффициентов передаточных функций. *Непараметрические модели* описываются оператором, осуществляющим преобразова-

ние функций входных сигналов в функции выходов, – это оценки таких характеристик, как весовые, передаточные, корреляционные функции, спектральные плотности, ряды Вольтерра.

4. Структурная идентификация

Задачи *структурной идентификации* представляют собой задачи выбора операторов или систем уравнений, описывающих процессы в исследуемой системе [17]. Часто структура понимается как некоторый математический объект, описываемый заданным функциональным отображением. Этот объект называют *виртуальным портретом*, или *статической структурой*, заданной в некотором пространстве.

И.И. Перельманом [25] были сформулированы основные требования к структуре формируемой модели, а именно, обеспечить:

- 1) максимально возможное (при данном объеме информации) качество восстановленной модели;
- 2) достаточную надежность процедуры оценивания неизвестных параметров;
- 3) максимальное сокращение объема вычислений при построении модели.

Под *порядком модели* понимают порядок дифференциальных уравнений, порядок модели в пространстве состояний или количество параметров в модели. Чтобы оценить адекватность выбора порядка, для оценивания порядка модели можно применять различные подходы. В [17] рассматриваются следующие группы методов, основанных на предварительном анализе данных:

1. Исследование спектральных оценок передаточной функции.
2. Проверка рангов выборочных матриц ковариации.
3. Исследование корреляции переменных.
4. Изучение информационной матрицы.

Оценивание порядка модели.

Спектрально-аналитические оценки. Непараметрическая оценка передаточной функции $\widehat{W}(e^{i\omega}) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$ основана на анализе данных о входе $u(t)$ и выходе $y(t)$ на интервале $t \in [1, T]$. Если $\widehat{W}(e^{i\omega})$ содержит информацию о специфике динамики объекта (величине резонансных пиков, высокочастотных срезов и фазовых сдвигов), то на основе анализа $\widehat{W}(e^{i\omega})$ можно выбрать порядок модели, чтобы адекватно отобразить динамику системы.

Проверка рангов выборочных матриц ковариации. Для объекта строится регрессионная модель с вектором переменных $\Phi_n \in R^s$. Далее вводится матрица

$$P_q(N) = \frac{1}{N} \sum_1^N \Phi_{q,i} \Phi_{q,i}^T,$$

где N – длина выборки данных, q – оценка порядка; $\det P_q(N)$ используется для проверки статистической гипотезы и принятия решения о порядке объекта. Изучение связи между вырожденностью матрицы $P_q(N)$ и порядком соответствующей модели было представлено в работе Р. Ли [20]. При наличии помех для применения статистики $P_q(N)$ необходимо вводить пороги, позволяющие минимизировать влияние помех с большой амплитудой.

Оценка размерности объекта в условиях неопределенности основывается на исследовании моделей различного порядка. Затем вводят критерий ошибки, анализ которого позволяет выбрать модель требуемого порядка. Наиболее часто при идентификации порядка модели применяют два критерия Акаике [40]. Первый критерий позволяет оценить финальную ошибку предсказания. Согласно этому критерию, выбор порядка авторегрессионного процесса осуществляется на основе минимизации средней дисперсии ошибки на каждом шаге предсказания. Второй критерий основан на методе максимального правдоподобия и получил название *информационного критерия Акаике*. Согласно этому критерию, порядок модели определяется посредством минимизации

некоторой теоретико-информационной функции. Этот критерий дает хорошие результаты для идеальных авторегрессионных процессов. Информационный критерий Акаике не является состоятельным: вероятность ошибки при выборе правильного порядка модели не стремится к нулю при больших N . Это приводит к завышению значения порядка модели при больших N . Для устранения указанных недостатков были предложены различные модификации информационного критерия Акаике.

Для оценивания выбора порядка модели могут применяться также [17] байесовский информационный критерий (BIC) или критерий Шварца (SC) [40], информационный критерий Хеннана – Куинна (HQC) и их модификации [49].

Также был предложен *функционально-множественный подход к выбору порядка модели объекта с лаговыми переменными*, при котором акцентируются на минимизации количества параметров модели, а, следовательно, и порядка модели.

Исследование коррелирования переменных. Это направление связано с выбором переменных, включаемых в структуру модели. Такой выбор косвенно влияет на порядок модели. Анализируется корреляция между выходной переменной и переменной – претендентом на включение в модель [17].

Изучение информационной матрицы. В [56] показано, что если у некоторых модельных структур порядок моделей окажется завышенным, то свойства глобальной и локальной идентифицируемости (см. в пункте «Идентифицируемость») будут утрачены. Вопросы переоценки порядка модели на основе анализа информационной матрицы рассматривались в [4].

Степень нелинейности объекта. Выбор структуры модели основан, прежде всего, на оценке класса линейности (нелинейности) объекта. На этапе становления теории идентификации были созданы методы оценивания степени нелинейности объекта на основе *анализа корреляционной и дисперсионной функций* процессов в объекте [31]. Дальнейшее развитие методов *корреляционного и дисперсионного анализа* представлено в [43], где используются корреляционные функции более высокого порядка для вычисления мер нелинейности. В [17] представлен под-

ход к выбору структуры нелинейной статической системы и оценки степени нелинейности, основанный на оценке *идентификационной мощности* для коэффициента структурности переменных системы.

5. Параметрическая идентификация

В зависимости от типа модели, в качестве *параметров* могут выступать коэффициенты дифференциальных или разностных уравнений, передаточных функций, частотных характеристик и т.д. Для нелинейных систем используются специализированные методы [23].

Из литературы известно большое количество алгоритмов. «Патриархом», не теряющим своих позиций по эффективности и переживающим новый виток популярности в связи с развитием вычислительных возможностей, является МНК и его различные версии: *обобщенный МНК (марковские оценки), метод взвешенных наименьших квадратов, метод штрафных функций*. Широкое применение в различных приложениях получили рекуррентные алгоритмы: *рекуррентный МНК, градиентные и псевдоградиентные методы, байесовские оценки, алгоритмы стохастической аппроксимации* и т.д.

Остановимся на основных типах алгоритмов [23]. Пусть исследуемый объект имеет модель

$$y(k) = c^T(k)x(k) + e(k), \quad c^T(k)x(k) = \hat{y}(k),$$

где $x(k)$ – входное воздействие; $e(k)$ – шумы, приведенные к выходу объекта (в частности, ошибки измерений); $c^T(k)$ – вектор неизвестных идентифицируемых параметров объекта. Описание моделями такого типа является подходящим для широкого класса статических и динамических объектов, линейных и линеаризованных.

Метод наименьших квадратов (МНК):

$$J = \| y - \hat{y}(k) \|^2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1R} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & \dots & x_{NR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_N \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что столбцы и строки $X_{N \times R}$ линейно независимы, шум – стандартный гауссовский, $M[e] = 0$, $D[e] = e^2$. Тогда

$$J = (y - x\hat{c})^T (y - x\hat{c}) = (y, y) - 2(x\hat{c}, y) + (x\hat{c}, x\hat{c}).$$

Оценка по МНК $\hat{c} = (x^T x)^{-1} x^T y$ вычисляется из условия

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = -2x^T y + 2x^T x\hat{c} = 0.$$

При этом предполагается, что существует обратная матрица $(x^T x)^{-1}$. Кроме того, принимается, что матрица $(x^T x)$ является неособенной, то есть $\text{rank}(X_{N \times R}) \geq R$ – при N независимых измерениях ($N > R$) столбцы матрицы линейно независимы.

Оценки, полученные МНК, являются состоятельными и асимптотически несмещенными для шумов с нулевым математическим ожиданием. При нормальном распределении шумов оценка МНК будет иметь минимальную дисперсию, то есть с учетом остальных качеств оценка будет эффективной (несмещенной, состоятельной, с минимальной дисперсией). Если шум не является гауссовским, МНК дает асимптотически эффективную оценку.

МНК имеет ряд существенных недостатков для определенных случаев, например, когда распределение ошибок характеризуется наличием «тяжёлых хвостов». В этом случае более эффективным считается применение метода марковских оценок, байесовских методов, метода максимального правдоподобия (ММП). Однако для успешного применения этих методов требуется более детальная априорная информация о шумах.

К другим ограничениям применимости МНК исторически относились необходимость значительной памяти для хранения выборки наблюдений, а также необходимость умножать и обрабатывать матрицы. И хотя сегодня это не является вычислительным ограничением для широкого ряда приложений, возникновение рекуррентных алгоритмов оказалось в свое время большим шагом вперед в смысле вычислительных преимуществ.

Рекуррентный МНК. Оценка на каждом шаге имеет вид:

$$\hat{c}_N = \hat{c}_{N-1} + K_N (y_N - x_N^T \hat{c}_{N-1} x_N),$$

где

$$R_N = R_{N-1} - R_{N-1}x_N(1 + x_N^T P_{N-1}x_N)^{-1} x_N^T R_{N-1},$$

$$K_N = R_{N-1}x_N(1 + x_N^T P_{N-1}x_N)^{-1} x_N^T.$$

Градиентные и псевдоградиентные алгоритмы. В качестве критерия оптимальности оценки параметров рассматривается некоторый функционал $J(c)$. Пусть $Q(x(n), c(n-1))$ – реализация этого функционала на n -м шаге. Тогда оценка параметров может быть вычислена по формуле:

$$c(n) = c(n-1) - \gamma(n)\nabla_c Q(x(n), c(n-1)),$$

где $\gamma(n)$ – некоторый скалярный коэффициент.

В работе [54] приводится анализ различных алгоритмов такого типа (различные версии *базового градиентного алгоритма*, *регулярные алгоритмы случайного поиска*, *поисковые алгоритмы стохастической аппроксимации*, *методов покоординатного спуска*, *обобщенного стохастического градиента*), а также *псевдоградиентных методов*.

В отличие от перечисленных методов, которые относятся к классу «предельно оптимальных» методов (решение ищется на всей выборке входных и выходных переменных), широкое применение нашли так называемые «*локально оптимальные*», дающие оценки, оптимальные для конкретного шага. К этому классу относится *алгоритм Качмажа* и его многочисленные модификации.

Алгоритм Качмажа. Его суть состоит в решении задачи *локальной оптимизации*, когда оценка на каждом шаге формируется из условия минимума функционала

$$J = (\hat{c}_N - \hat{c}_{N-1})^2 + \lambda(y_N - \hat{c}_N^T x_N)$$

и условия минимальной скорости сходимости. Оценка по методу Качмажа имеет вид

$$\hat{c}_N = \hat{c}_{N-1} + \frac{y_N - \hat{c}_{N-1}^T x_N}{x_N^T x_N}, \quad \hat{c}_0 = 0.$$

В соответствии с геометрической интерпретацией алгоритма вектор оценки на каждом шаге выбирается ортогонально вектору оценки на предыдущем шаге, что обеспечивает максимальную скорость сходимости. Скаляр в знаменателе формулы обеспечивает отсутствие необходимости обращения матрицы. Одна-

ко этот алгоритм (как и все алгоритмы, не использующие всю выборку наблюдений) чувствителен к изменениям в последовательности входных сигналов, и в присутствии помех сходимость «в точку» по алгоритму Качмажа невозможна. Поэтому были разработаны различные модификации (для уменьшения окрестности влияния помех, для обеспечения сходимости в точку за счет учета характеристик помех и т.д.

Учет априорной информации. С учетом априорной информации о стохастических свойствах объектов применяются состоятельные методы идентификации систем с помехами во входных и выходных сигналах, такие как *методы инструментальных переменных* [57] и их рекуррентные модификации.

Как отмечал Я.З. Цыпкин [36], «алгоритмы типа стохастической аппроксимации ... не учитывают имеющуюся априорную информацию как о помехах, так и о самом решении, то есть о параметрах объекта. Оптимальные же алгоритмы рекуррентной формы метода наименьших квадратов не всегда оказываются адекватными априорной информации о помехах и области принадлежности параметров идентифицируемого объекта. В итоге выбираемые – по существу, наугад – алгоритмы идентификации часто не приводили к надежным и обоснованным результатам».

Информационная теория идентификации. В рамках этой теории Я.З. Цыпкиным [36] были сформированы *асимптотически оптимальные алгоритмы* идентификации, то есть алгоритмы, обладающие предельно возможной, максимальной скоростью сходимости при известной плотности распределения помехи. В том случае, когда плотность распределения помехи неизвестна, а известен лишь класс, которому она принадлежит, формируются *асимптотически оптимальные на классе* алгоритмы идентификации, обладающие гарантированной скоростью сходимости.

Рандомизированные алгоритмы. Если помехи являются *почти произвольными*, то есть могут не только иметь неизвестное распределение, но и быть интервальными, целесообразно применять *методы асимптотических и неасимптотических доверительных множеств* для параметра (множеств, которым это значение оценки параметра принадлежит с заданной вероят-

ностью). Показано [10], что в условиях произвольных помех эффективным подходом является *рандомизация*, заключающаяся в добавлении в алгоритм дополнительных, случайных, но контролируемых возмущений.

Идентификация в условиях неопределенности. Для объектов с интервальной неопределенностью были предложены методы на основе *интервального анализа* [15], основанного на *методе описанных эллипсоидов*. В работе [22] на основе предположения об ограниченности возмущений и ошибок в системе и об отсутствии информации о законах их распределений был предложен *метод гарантированного оценивания*.

Было показано, что задачи оценивания параметров линейных стационарных систем сводятся к нахождению множеств всевозможных значений искомым величин, например, вектора параметров или фазовых координат системы, совместимых с такими ограничениями на неопределенность. Основой предложенного метода является использование *техники линейных матричных неравенств* (см. [28]).

При статистическом описании неопределенности функционалы от эмпирического распределения с увеличением объема выборки наблюдений сближаются с соответствующими «теоретическими» значениями [6], что позволяет состоятельно оценивать характеристики объекта методом подстановки и его модификациями.

Для повышения точности идентификации в условиях неопределенности характеристик информативности полезных сигналов обычно применяют *методы регуляризации* [53].

Также для идентификации в условиях неопределенности используются минимаксные методы теории *робастного оценивания* [27]. В соответствии с принципом оптимальности на классе строится оптимальная функция потерь для наименее благоприятной плотности распределения из заданного класса [22].

6. Непараметрическая идентификация

Если качество данных измерений входов и выходов является удовлетворительным (незначительные пропуски, несущественные искажения), то вполне целесообразно применять опи-

сания систем в виде дифференциальных или разностных уравнений. В условиях же неполной информации, в первую очередь – о структуре объекта, используются непараметрические модели [13].

Применительно к непараметрическим моделям, как правило, применяется *активная идентификация*, когда на вход объекта подаются специально сформированные тестовые воздействия. При описании объекта во временной области обычно используются непериодические – импульсные, ступенчатые и другие тестовые сигналы, а в частотной – соответственно, периодические (типа синусоид).

Основные характеристики, используемые для построения непараметрических моделей [13]:

1) *переходная характеристика*, представляющая собой реакцию системы на воздействие в виде единичной ступенчатой функции при нулевых начальных условиях;

2) *импульсная характеристика* – реакция на δ -импульс при нулевых начальных условиях;

3) *передаточная функция системы* – преобразование Лапласа от ее импульсной характеристики.

Методы на основе переходных и импульсных переходных характеристик. Модель системы может быть представлена в виде передаточной функции, оценка которой формируется на основе оценок импульсной характеристики. Последние могут быть получены на основе корреляционных методов.

Корреляционные методы [11] в общем случае сводятся к необходимости решения интегрального уравнения Винера –

Хопфа: $R_{yu}(t) = \int_0^{\infty} w(\tau)R_{uu}(t - \tau)d\tau$, где $R_{uu}(t)$ – автокорреляционная функция входного сигнала объекта; $R_{yu}(t)$ – взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов объекта; $w(\tau)$ – импульсная переходная функция (ИПФ) объекта, подлежащая определению в процессе идентификации. Решение интегрального уравнения Винера – Хопфа относительно ИПФ является некорректной задачей. В качестве альтернативы применению методов регуляризации Н.С. Райбманом был разработан метод типовой табличной идентификации устойчивых динамических объектов управления [33]. Метод сводится, по существу,

к нахождению оценок корреляционных функций по экспериментально полученным выборкам входного и выходного сигналов и позволяет получать модели в виде дифференциальных уравнений. В дальнейшем появились его различные модификации [11], позволяющие повысить его точность и скорость сходимости. При этом использовались эволюционные вычисления и генетические алгоритмы [50].

Методы на основе оценок частотных характеристик. Применение частотных методов идентификации линейных систем предусматривает определение *частотных* или *спектральных* характеристик. Частотные характеристики динамических объектов, как правило, определяются на основе подачи на вход объекта гармонического сигнала, частота которого изменяется в определенном диапазоне, и измерения выхода. Таким образом, частотная характеристика может быть определена экспериментально на основе частотных спектров измеренных входных и выходных сигналов.

Разработка **информационно-теоретических подходов** к структурной, параметрической и непараметрической идентификации стохастических систем предполагает применение согласованных мер зависимости случайных величин и мер расхожденности вероятностных распределений. В [46] предложены меры с использованием энтропий Реньи и Цаллиса, которые включают энтропию Шеннона как частный случай.

Оценки получают по критерию максимума информации о выходном сигнале и параметрах системы, содержащейся во входном сигнале, что позволяет максимально использовать всю имеющуюся информацию об исследуемом объекте. Информационные характеристики являются состоятельными характеристиками связи между случайными сигналами.

7. Нелинейные модели

Идентификация нелинейных *статических объектов* может осуществляться посредством следующих основных подходов:

1) линеаризованного описания известной математической модели, представленной в виде нелинейных дифференциальных,

интегральных, конечно-разностных уравнений, посредством *методов линеаризации: гармонической, статистической, малых приращений* – преимущественно для объектов с гладкими характеристиками и для случаев небольших отклонений и возмущений относительно номинальных режимов;

2) *методы идентификации, основанные на аппроксимации модели* объекта, если структура модели точно не известна. Моделирование нелинейной системы может быть интерпретировано как аппроксимация оператора, характеризующего систему, в классе функциональных полиномов заданной степени. Для **статических нелинейных объектов** с целью аппроксимации могут применяться полиномы Чебышева, Эрмита, Лагерра.

Для идентификации **динамических нелинейных систем** используются методы *матричных операторов*, с помощью которых строятся функциональные полиномы, ортогональные для заданного класса входных сигналов. Например, в случае белого гауссовского шума модель системы может быть представлена ортогональным функциональным рядом Винера. Процесс идентификации заключается в определении ядер на основе статистической обработки данных наблюдений.

Распространенным подходом, нашедшим широкое освещение в литературе, является построение моделей с помощью *рядов Вольтерра, Гаммерштейна, Винера, непрерывных и дискретных полиномов Колмогорова – Габора*, их расширенные версии и комбинации.

Представление ортогональных *функциональных рядов в частотной области* позволяет найти оптимальное решение в явном виде, и для вычисления оценок в частотной области используется алгоритм быстрого преобразования Фурье, что позволяет получать оценки, обладающие свойствами несмещенности и состоятельности [37].

Перспективным для идентификации нелинейных динамических объектов является направление, связанное с машинным обучением, в частности, с применением нейросетевого подхода, а также баз знаний.

8. Идентификация систем с распределенными параметрами

В системах с распределенными параметрами (СРП) входные переменные являются функциями не только времени, но и пространственных координат (см. раздел 3.1). Динамика СРП описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями, а также «гибридными» системами уравнений. Коэффициенты в уравнениях часто зависят от пространственных координат и времени.

Основным направлением разработки и исследований СРП и их математического моделирования является *структурная теория распределенных систем*, разработанная А.Г. Бутковским [7]. Наиболее известными формами моделей систем с распределенными параметрами являются [32]:

1) интегро-дифференциальные уравнения с учетом краевых и граничных условий;

2) функция Грина (весовая, импульсная переходная функция, функция влияния) линейной системы;

3) передаточная функция - преобразование Лапласа по переменной времени t функции Грина стационарной линейной системы;

4) функциональная зависимость состояния от координат в виде бесконечного ряда (как правило, применяется при оценке состояния);

5) стохастическое дифференциальное уравнение Ито для систем с распределенными параметрами; регрессионная модель;

6) авторегрессионная модель (обычно применяется, когда входные поля трудноизмеримы или вообще недоступны для измерения);

7) обобщенная регрессионная модель – когда для измерения доступно состояние объекта;

8) модальное представление распределенных объектов – если передаточная функция может быть представлена совокупностью передаточных функций по пространственным модам.

Для СРП может быть решена задача аппроксимации – замены бесконечномерной системы адекватной конечномерной си-

стемой, так как любая вычислительная процедура предполагает наличие ограниченного числа уравнений в решаемой системе.

Методы идентификации СРП можно условно разделить на две группы [32]. К первой группе относятся методы, предусматривающие сведение математического описания систем с распределенными параметрами к системе алгебраических, трансцендентных или обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Ко второй группе можно отнести методы, не связанные со сведением к ОДУ, они получили название *прямых*.

Многие задачи идентификации систем, описываемых уравнениями в частных производных, относятся к числу некорректно поставленных, что обуславливает применение регуляризации решений уравнений.

К методам сведения моделей СРП к моделям систем с сосредоточенными параметрами относятся: *метод Галеркина, метод характеристик, метод конечных элементов, дискретизация, метод моментов, разложение по ортонормальному базису, использование сплайнов* и др.

Из всего разнообразия *методов оптимизации* в работах по идентификации обычно применяются следующие.

Градиентные методы и их модификации для СРП. Для решения задач идентификации применяются: градиентные методы *Гаусса – Ньютона* и *Ньютона – Рафсона*, *Флетчера – Ривса*, *стохастическая аппроксимация*, метод пошагового спуска, *метод наискорейшего спуска* и *метод присоединенного состояния*.

Методы калмановской фильтрации и нелинейной фильтрации. Имеются обобщения метода на СРП, однако чаще калмановская фильтрация используется после предварительного сведения уравнений в частных производных к ОДУ или конечно-разностным уравнениям любым из известных методов.

Вариационные методы дают возможность найти состояние системы и/или зависящие от состояния, времени и координат параметры как экстремумы функционала качества (критерия).

Методы теории оптимального управления используются обычно в задачах оценки состояния. Задача идентификации

предварительно сводится к задаче оптимального управления. Решение чаще всего приводится в алгоритмической форме.

Методы нелинейного программирования применяются тогда, когда имеются априорные сведения о нелинейности уравнений и/или краевых условий либо о нелинейности зависимости идентифицируемых величин от координат и/или времени.

Метод максимального правдоподобия. Обычно задачи, в которых используется этот метод, сводятся к задачам вариационного исчисления или нелинейного программирования. Возможности применения метода в значительной степени ограничены сложностями, связанными с априорным оцениванием функций плотностей распределения (условного распределения).

Спектральная теория для систем с распределенными параметрами, созданная В.В. Солодовниковым для нестационарных сосредоточенных систем, была впоследствии применена [14] для анализа и синтеза распределенных систем управления. Было введено понятие *спектральной характеристики по пространственной переменной*. Дифференциальное уравнение с частными производными на основании свойств спектральных характеристик может быть представлено бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши, правая часть которых содержит члены, учитывающие граничные условия и внешние возмущения. Основным преимуществом спектрального метода является возможность представления распределенных систем в форме пространства состояний. Анализ и синтез с использованием спектрального метода проводится по ограниченному, конечному числу уравнений системы на основе методов аппроксимации и модального представления СРП.

Модели, учитывающие воздействие случайных факторов. Задача идентификации неизвестных статистических характеристик случайных параметров модели СРП сводится к задаче минимизации квадратичного функционала, вычисляемого с использованием усредненной *проекционной* модели.

Нейросетевые модели. Применение к СРП обусловлено затруднением применения стандартных методов идентификации вследствие нелинейности моделей, большого объема данных,

неточности их измерений, а также высокой вычислительной сложностью классических методов.

Нечеткие модели – на основе представления СРП в виде многосвязной сосредоточенной системы.

9. Проблема идентифицируемости систем

Не существует единого подхода к решению задач, объединенных понятием идентифицируемости, более того, терминологию в этой области тоже нельзя считать общепринятой. Под *идентифицируемостью* системы, безотносительно к методу восстановления ее параметров, понимается [1] отсутствие другой какой-либо другой системы в заданном классе, которая ведет себя точно так же, как и исходная система, и, следовательно, такие системы *принципиально неразличимы* в выбранных для идентификации условиях. Восстановить однозначно параметры такой системы нельзя.

Иногда говорят о структурной либо параметрической идентифицируемости, подразумевая, в сущности, одну и ту же задачу. Анализ идентифицируемости замкнутых систем управления непосредственно связан с задачей идентификационного синтеза. Отдельные научные направления составляют исследование идентифицируемости для непараметрических моделей и моделей систем с распределенными параметрами. Начало интенсивным исследованиям в данной области было положено в работе Р. Беллмана и К. Острёма [42], где был приведен анализ проблемы и введен термин «структурная идентифицируемость», который подразумевал идентифицируемость семейства моделей определенной структуры.

В процессе идентификации вначале может быть сформировано множество допустимых моделей, имеющих различную структуру. Процедура *параметризации* (выявление зависимости матриц состояния, управления и наблюдения системы от набора оцениваемых параметров) определяет прежде всего количество используемых в модели параметров. Это количество может в общем случае превышать объем выборки наблюдений, что приводит к неразрешимости задачи идентификации [6]. Также может возникнуть проблема неоднозначности значений пара-

метров моделей для выбранной структуры. В качестве критерия соответствия построенной модели реальной системе обычно выбирается какой-либо функционал разностей значений параметров модели и реальной системы и находится значение оценок параметров, доставляющих минимум этому критерию, то есть находится наилучшая модель.

Адекватность полученной модели определяется не только правильным выбором структуры, но также и информативностью данных наблюдений. Критерием *информационной насыщенности* данных может выступать функционал от *информационной матрицы Фишера*. Чем больше определитель информационной матрицы, тем больше информации об оцениваемых параметрах содержится в наблюдениях за системой. Не всегда могут помочь в этой ситуации методы планирования эксперимента, когда требуется повысить информативность данных. Возможен случай, когда информационная матрица Фишера является вырожденной, причем варьирование эксперимента в пределах выбранной схемы его проведения не приводит к увеличению определителя информационной матрицы [1]. Применительно к анализу идентифицируемости моделей динамических систем Р. Калман ввел понятие *невыврожденности*, эквивалентное современному понятию локальной идентифицируемости.

В работе [60] введены понятия априорной (теоретической) и апостериорной (практической) идентифицируемости. Под априорной идентифицируемостью (в случае детерминированных значений входов и точно измеряемых выходов) понимается принципиальная возможность однозначного определения параметров модели. Анализ *априорной идентифицируемости* проводится на основе качественного исследования структуры модели и схемы планируемого «идеального» эксперимента. Анализ *апостериорной идентифицируемости* сводится к отысканию оценок параметров и их ошибок и определению, какие оценки параметров можно признать статистически значимыми.

Свойство структуры модели допускать одно или несколько решений задачи параметрической идентификации называется *структурной идентифицируемостью* [60]. Две модели $M(\theta)$ и $M(\theta^*)$ с одинаковой модельной структурой $M(\cdot)$ называются

неразличимыми по выходу (обозначим $M(\theta^*) \approx M(\theta)$, $\theta, \theta^* \in \Omega$), если для любого допустимого входа $u(t)$ модели имеют одинаковые выходы: $y(t, \theta, u) \equiv y(t, \theta^*, u)$, $t \geq 0$.

Параметр θ_i (одна из компонент вектора $\theta \in \Omega$) называется *структурно локально идентифицируемым*, если почти для любого $\theta^* \in \Omega$ существует окрестность $\mathcal{V}(\theta^*)$, такая что $\theta \in \mathcal{V}(\theta^*) \subset \Omega$ и $M(\theta^*) \approx M(\theta) \Rightarrow \theta_i = \theta_i^*$. Параметр θ_i называется *структурно глобально идентифицируемым*, если почти для любого $\theta^* \in \Omega$: $\theta^* \subset \Omega$ и $M(\theta) \approx M(\theta^*) \Rightarrow \theta_i = \theta_i^*$.

Локальная идентифицируемость обеспечивает единственность решения задачи параметрической идентификации в некоторой окрестности точки параметрического пространства, а глобальная – единственность решения этой задачи во всем параметрическом пространстве. Локальная идентифицируемость является необходимым условием глобальной идентифицируемости. Для анализа локальной идентифицируемости применяется подход на основе *принципа чувствительности* [1], для глобальной – построение и решение системы идентифицирующих уравнений на основе принципа *исчерпывающей характеристики* (Exhaustive Summary) [17]. Принцип чувствительности основан на исследовании функций чувствительности отклика к непрерывным вариациям параметров. На основе этого определяются параметрические функции, допускающие локально однозначное оценивание.

Под *исчерпывающей характеристикой* (Exhaustive Summary) понимается вектор $\gamma(\theta)$, содержащий полную (но не избыточную) информацию о параметрах, имеющуюся в отклике модели, то есть

$$y(t, \theta, u) \equiv y(t, \theta^*, u), \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \gamma(\theta) = \gamma(\theta^*).$$

В работе [2] приведены необходимые и достаточные условия идентифицируемости динамических систем, заданных в пространстве состояний.

Большинство современных исследований по идентифицируемости нелинейных систем базируется на работе [58].

Идентифицируемость систем с распределенными параметрами большинство авторов определяет через устойчивость решения обратной задачи математической физики (или управ-

ления), если это решение единственно. Существуют понятия *абсолютной и ϵ -идентифицируемости*, согласно которым система абсолютно идентифицируема, если алгоритм, минимизирующий некоторый критерий качества, сходится; в случае, когда абсолютная величина критерия не превосходит ϵ^2 , система ϵ -идентифицируема.

Проблемы идентифицируемости замкнутых систем.

Проблема сходимости оценок в замкнутом контуре возникает из-за коррелированности возмущений на выходе объекта и в сигнале управления. Решение проблемы неидентифицируемости при недостаточной априорной информации о системе или действующих на нее возмущениях осуществляется либо за счет введения в систему дополнительных внешних воздействий, либо за счет изменения алгоритма функционирования системы управления [16]. Примеры методов обеспечения идентифицируемости [48]: полное или частичное размыкание контуров обратной связи; попеременное включение нескольких регуляторов с различными параметрами настройки; введение запаздывания в контур обратной связи; использование нелинейных или нестационарных регуляторов.

10. Идентификационный синтез

В системах управления с идентификатором в цепи обратной связи входные переменные u (управления) коррелируют с шумами на выходе системы, и оценки параметров объекта становятся смещенными. Таким образом, идентификация объекта в замкнутых системах осуществляется в условиях естественных шумов объекта управления и дополнительных шумов, вносимых в замкнутый контур. В задаче идентификационного синтеза объектом управления является модель наблюдений со структурированной неопределенностью из определенного класса, индексированного абстрактным параметром [5]. Цель синтеза регулятора формализуется посредством *функционала стоимости управления*; нижняя грань по стоимости управления называется *ценой управления*. Неопределенность в описании объекта представляется отклонением параметров настраиваемой модели от точной,

а мера отклонения определяется функционалом невязки выходных переменных объекта и настраиваемой модели.

Системы с *максимальной неполной информацией* (по классификации А.А. Фельдбаума [34]) характеризуются невозможностью точного прогноза процессов по накопленной информации. Например, при независимых или марковских возмущениях. При *независимом (пассивном)* накоплении информации темп изучения объекта не зависит от выбора стратегии управления. Методы оптимизации систем с пассивным накоплением информации рассматриваются в классической теории регулирования. В оптимальных системах с *активным накоплением информации* управление дуально (выполняет двойственную функцию: изучающую и собственно управляющую, минимизируя суммарный риск действия и риск изучения, порождаемые неустранимой неопределенностью объекта [6]). В таких системах темп изучения объекта зависит от стратегии управления. Результаты изучения объекта идентификатором трансформируются в «параметрические возмущения»: идентификатор, по сути, осуществляет «управление» коэффициентами регулятора.

Парадигма идентификационного подхода на основе байесовского оценивания была сформулирована еще в 50–60 годах XX века. Конструктивные результаты в адаптивном управлении динамическими объектами (предельная оптимальность и идентифицирующее свойство стратегии) были получены к началу 80-х годов. В идентификаторе использовались, как правило, МНК и его упрощенные версии (схема Гудвина). На следующем этапе (с середины 80-х годов) усилия концентрировались на оптимизации систем по скорости сходимости к минимуму функционала стоимости управления для объектов с параметрической и непараметрической неопределенностью [6].

Повышение быстродействия идентификатора улучшило качество управления, однако вопросы взаимосвязи темпов переходных процессов в идентификаторе и основном контуре, и, соответственно, преимуществ идентификационного подхода перед альтернативными методами синтеза остаются открытыми.

Малая вариативность управлений и требование устойчивости замкнутой системы стимулировали появление рекуррентных алгоритмов и активной идентификации (с использованием поис-

ковых процедур и тестовых сигналов). Однако реализация активных стратегий осложнена ограничениями режима нормальной эксплуатации и трудностями оценки потерь на поиск, поэтому вопрос о выборе активной или пассивной идентификации не имеет универсального ответа.

Применение идентификационного синтеза сопряжено с рядом трудностей [5], в частности:

1) на больших временных интервалах предположение о стационарности объекта не всегда адекватно;

2) предельно-оптимальные стратегии существенно различаются по скорости переходных процессов, и вопрос об оптимизации алгоритмов в этом ключе требует специального рассмотрения;

3) остаются открытыми вопросы идентификации объекта в замкнутом контуре, когда оценки параметра используются при формировании управлений: может потребоваться принятие специальных мер по обогащению спектра процесса управления).

Решение задачи идентификационного синтеза в неасимптотической постановке на основе байесовского подхода осложняется предположением о том, что случайный параметр имеет известную априорную плотность распределения (что, вообще говоря, не адекватно реальным условиям).

При конечном горизонте управления оценки чувствительны к априорной плотности распределения [5], и зависимость ослабевает лишь при горизонте $T \rightarrow \infty$ («принцип асимптотической инвариантности байесовских оценок» по отношению к априорной плотности). В реальных задачах «априорная трудность» может быть преодолена, например, введением большого параметра T). Вопрос о состоятельности оценок параметра объекта в замкнутом контуре требует специального рассмотрения.

Альтернативой может быть отказ от сильной состоятельности оценок параметров, то есть от сходимости оценок к истинным значениям. Работоспособность системы в этом случае оценивается степенью достижения более слабой цели адаптации – близости выходов или состояний модели и объекта.

Методами получения эффективных оценок могут служить регуляризованные модификации метода наименьших квадратов, а также *методы, использующие псевдорешения*, например, по-

лучаемые посредством процедуры Мура – Пенроуза [2], и т.д. Условия идентифицируемости для систем разных типов сформулированы в [2].

11. Современные тенденции

Оценки максимального правдоподобия основаны на минимизации критерия, который в значительном количестве случаев является невыпуклым и может приводить к проблемам численного поиска и оценкам, попадающим в локальные минимумы [53]. Поэтому важное значение приобретают алгоритмы идентификации, использующие процедуры *овыпукления*. Также продолжают развиваться методы на основе регуляризации для асимптотического уменьшения смещения.

Системы автоматического и автоматизированного управления сегодня в значительной степени изменяются, опираясь на возможности информационных технологий. Новые возможности появляются и для создания эффективных методов и алгоритмов идентификации. Прежде всего – возможность быстрой обработки больших объемов данных и машинного обучения. Разработка новых методов анализа данных позволяет создавать алгоритмы идентификации, использующие в реальном времени всю имеющуюся информацию – априорную и апостериорную – об объекте управления. Можно выделить две основные группы алгоритмов этого поколения.

Первую группу составляют *алгоритмы идентификации, основанные на искусственных нейронных сетях* (см. раздел 4.3). Ко второй относятся *алгоритмы, использующие индуктивные знания* – закономерности, извлекаемые из всей совокупности данных об объекте и его функционировании на основе их анализа, и постоянно пополняемые. К этим знаниям, конечно, можно отнести эмпирические распределения и т.п. Но принципиально новые преимущества предоставят знания, формируемые на основе *интеллектуального анализа данных* (Data Mining). Эти знания позволяют получать не асимптотически оптимальные сильно состоятельные оценки и не локально оптимальные, а максимально точные из возможных при данном объеме и содержании данных об объекте, включая его не моделируемую внутреннюю

динамику. К таким алгоритмам относится интеллектуальный алгоритм ассоциативного поиска [41], моделирующий процесс принятия решений человеком на основе его опыта и знаний в определенной ситуации.

Перспективными представляются методы, основанные на теории статистического обучения (Statistical Learning Theory, SLT), изучающей методы построения и анализа алгоритмов, обучаемых по прецедентам.

В алгоритмах идентификации на основе машинного обучения для ряда приложений оказывается эффективным использование Reinforcement Learning – *обучения с подкреплением*, когда система обучается, взаимодействуя с некоторой средой.

12. Управление с прогнозирующей моделью

Управление с прогнозирующей моделью (MPC – Model Predictive Control) представляет собой технологию управления с обратной связью, реализующую в реальном времени решение задачи оптимального управления с конечным горизонтом [14]. Эта технология обеспечивает такие свойства замкнутой системы, как: гарантированное достижение выбранного критерия оптимальности (или нескольких критериев одновременно), асимптотическая устойчивость, робастность, возможность учета нелинейностей и ограничений на динамику объекта и управляющие воздействия, учет требований к качеству процесса управления, контролирование большого числа переменных и т.д. Однако реализация алгоритмов MPC сопряжена, как правило, со значительными вычислительными затратами.

Синтез с прогнозирующей моделью основывается на том, что в идентификаторе настраивается модель прогнозирования будущего поведения объекта на основе имеющейся информации о системе [29]. Управляющие сигналы определяются на заданном горизонте управления в блоке управления (оптимизации) с учетом целевой функции и ограничений. Оптимизатор определяет последовательность управляющих воздействий на протяжении всего горизонта управления, соблюдая ограничения на входящие сигналы и на состояние. Оптимизация выполняется на каждом временном шаге, но только первый элемент последо-

вательности оптимальных управляющих воздействий подается на объект. На следующем шаге фиксируются новые измерения, проводится оптимизация и прогнозирование на новых горизонтах, увеличенных на один шаг, и т.д. Учет ограничений при синтезе прогнозирующего управления реализуется на основе сведения исходной задачи к задаче линейного или квадратичного программирования с последующим применением численных методов.

Управление на основе прогнозирующих моделей позволяет также учитывать неопределенности в задании моделей объектов и возмущений. В условиях неопределенности для прогнозирования могут использоваться, например, методы непараметрической статистики [9].

МРС позволяет управлять многомерными и многосвязными объектами со сложной структурой, проводить оптимизацию процессов в режиме реального времени с учетом ограничений на управляющие и управляемые переменные в условиях неопределенности.

Первые работы по МРС появились в конце 70-х годов XX века. Первым идею данного подхода выразил И.И. Перельман [26]. Методы были ориентированы на решение проблемы оптимального управления за минимальное время методами линейного программирования. В 1963 году был предложен принцип *убывающего горизонта* – одна из главных идей управления с прогнозирующими моделями в контексте «разомкнутой оптимальной обратной связи» [29]. Принцип широко использовался в 1970-х годах, в частности, при разработке *универсальных алгоритмов оптимального управления*, идея которых была сформулирована А.А. Красовским [19]. Был разработан алгоритм синтеза прогнозирующего управления на основе минимизации математического ожидания квадратичного критерия на заданном горизонте управления (конечный или асимптотически бесконечный). Д. Кларком [47] были разработаны *методы адаптивного управления с расширенным горизонтом*. Появилось понятие *обобщенного прогнозирующего управления*, предложены методы *робастного прогнозирующего управления*.

Формируется теория управления с прогнозирующими моделями для нелинейных систем представлена. Появляется метод

МРС для систем с неопределенным описанием с учетом влияния запаздывания. Были разработаны алгоритмы децентрализованного прогнозирующего управления (Decentralized MPC) для групп связанных подзадач, имеющих общие ограничения. Большое внимание уделяется также задаче синтеза управления с прогнозированием для систем со случайными параметрами и мультипликативными возмущениями.

В настоящее время развитие идей прогнозирующего управления происходит в направлении использования нелинейных моделей, придания робастных свойств замкнутой системе управления, применения современных оптимизационных методов в режиме реального времени, рассмотрения систем при наличии разного рода возмущений, ограничений на объект, синтеза прогнозирующего управления при наличии запаздываний и неопределенностей в описании модели объекта, а также при косвенных измерениях вектора состояния.

Одним из важнейших применений методов МРС является соответствующий класс систем усовершенствованного управления технологическими процессами непрерывных производств (Advanced Process Control – APC) [14].

Литература

1. АВДЕЕНКО Т.В. *О методологии структурной идентифицируемости* // Труды XII ВСПУ. – 2014. – С. 2901–2913.
2. БАЛОНИН Н.А. *Теоремы идентифицируемости*. – СПб.: Политехника, 2010. – 48 с.
3. БОРОВКОВ А.А. *Математическая статистика*. – М.: Наука, 1984. – 472 с.
4. БРИТЕНКОВ А.К., ДЕДУС Ф.Ф. *Прогноз временных последовательностей с использованием обобщённого спектрально-аналитического метода. Математическое моделирование. Оптимальное управление* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – №5(2). – С. 28–32.
5. БУНИЧ А.Л., БАХТАДЗЕ Н.Н. *Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором*. – М.: Наука, 2003. – 232 с.

6. БУНИЧ А.Л. *Системы управления с идентификатором* // Управление большими системами. – 2011. – Вып. 33. – С. 35–69.
7. БУТКОВСКИЙ А.Г. *Структурная теория распределенных систем*. – М.: Наука, 1977. – 320 с
8. ВАПНИК В.Н., ЧЕРВОНЕНКИС А.Я. *Теория распознавания образов*. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
9. ВАСИЛЬЕВ В.А., ДОБРОВИДОВ А.В., КОШКИН Г.М. *Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей*. – М.: Наука, 2004. – 508 с.
10. ГРАНИЧИН О.Н., ПОЛЯК Б.Т. *Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах*. – М.: Наука, 2003. – 293 с.
11. ГРАЧЕВ А.Н., ПОНЯТСКИЙ В.М., ВО КОНГ ТУ. *Структурная и параметрическая идентификация линейных динамических объектов корреляционными методами* // XII ВСПУ. – 2014. – С. 2926–2935.
12. ДЕРЕВИЦКИЙ Д.П., ФРАДКОВ А.Л. *Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления*. – М.: Наука, 1981. – 216 с.
13. ДИЛИГЕНСКАЯ А.Н. *Идентификация объектов управления*. – Самара, изд-во СГТУ, 2009. – 136 с.
14. ДОЗОРЦЕВ В.М., ИЦКОВИЧ Э.Л., КНЕЛЛЕР Д.В. *Усовершенствованное управление технологическими процессами (АРС): 10 лет в России* // Автоматизация в промышленности. – 2013. – №1. – С. 12–19.
15. ЖОЛЕН Л., КИФЕР М., ДИДРИ О., ВАЛЬТЕР Э. *Прикладной интервальный анализ*. – Москва–Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и стохастическая динамика», 2007. – 468 с.
16. ЗЫБИН Е.Ю. *Об идентифицируемости линейных динамических систем в замкнутом контуре в режиме нормальной эксплуатации* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – №4. – С. 160–170.
17. КАРАБУТОВ Н.Н. *Адаптивная идентификация систем: Информационный синтез*. – М.: URSS, 2016. – 384 с.

18. КОВАЛЬ В.А. *Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем : Учебное пособие.* – Саратов: Изд-во СГТУ, 2010. – 145 с.
19. КРАСОВСКИЙ А. А., ШЕНДРИК В. С. *Универсальный алгоритм оптимального управления непрерывными процессами // Автоматика и телемеханика.* – 1977. – №2. – С. 5–13.
20. ЛИ Р. *Оптимальные оценки, определение характеристик и управление.* – М.: Наука, 1996. – 176 с.
21. ЛЬЮНГ Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя.* – М.: Наука, 1991.
22. НАЗИН С.А., ПОЛЯК Б.Т. *Параметрическое оценивание методом эллипсоидов в линейных многомерных системах с неопределенным описанием модели // Автоматика и телемеханика.* – 2009. – №6. – С. 67–80.
23. НЕСТЕРОВ С.А. *Адаптивные системы управления: Конспект лекций.* – СПб.: Факультет технической кибернетики СПбГПУ, 2005. – 90 с.
24. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А. А. *Математические модели в управлении производством.* – М.: Наука, 1975. – 616 с.
25. ПЕРЕЛЬМАН И.И. *Методология выбора структуры модели при идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика.* – 1983. – №11. – С. 5–29.
26. ПЕРЕЛЬМАН И.И. *Идентификация моделей для прогнозирования выходной реакции объекта // Симпозиум ИФАС по идентификации и оценке параметров систем.* – Тбилиси, 1975. – С. 112–121.
27. ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Робастная устойчивость и управление.* – М.: Наука, 2002, – 303 с.
28. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие.* – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
29. ПРИСТУПА М.Ю., СМАГИН В.И. *Прогнозирующее управление дискретными системами с неизвестным входом и его применение к задаче управления экономическим объектом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* – 2012. – №1(18). – С. 5–15.

30. РАЙБМАН Н.С., ЧАДЕЕВ В.М. *Адаптивные модели в системах управления*. – М.: Советское радио, 1966. – 160 с.
31. РАЙБМАН Н. С., ТЕРЕХИН А.Т. *Дисперсионные методы случайных функций и их применение для исследования нелинейных объектов управления // Автоматика и телемеханика*. – 1965. – №26. – С. 500–509.
32. РАЙБМАН Н.С., БОГДАНОВ В.О., КНЕЛЛЕР Д.В. *Идентификация систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика*. – 1982. – №6. – С. 5–36.
33. *Типовые линейные модели объектов управления / Под ред. Н.С. Райбмана*. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 264 с.
34. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
35. ХЬЮБЕР П. *Робастность в статистике*. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
36. ЦЫПКИН Я.З. *Основы информационной теории идентификации*. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
37. ШАНШИШВИЛИ В.Г. *Структурная идентификация нелинейных динамических систем на множестве непрерывных блочноориентированных моделей // Труды XII ВСПУ*. – 2014. – С. 3018–3029.
38. ÅSTRÖM K.J., EYKHOFF P. *System Identification: A Survey // Automatica*. – 1971. – P. 123–162.
39. ÅSTRÖM K., BOHLIN T. *Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records // Proc. IFAC Symposium on Self-Adaptive Systems, Teddington, UK*. – 1965. – P. 96–111.
40. AKAIKE H. *A New Look at the Statistical Model Identification. System Identification and Time-Series Analysis // IEEE Trans. Automatic Control AC-19*, 1974. – P. 716–723.
41. BAKHTADZE N., KULBA V., LOTOTSKY V., MAXIMOV E. *Identification-Based Approach to Soft Sensors Design // IFAC-PapersOnLine*. – 2007. – Vol. 10. – P. 302–307. – DOI: 10.3182/20100701-2-PT-4011.00052.
42. BELLMAN R., ASTROM K.J. *On Structural Identifiability // Math. Biosci.* – 1970. – Vol. 7, No. 3/4. – P. 329–339.

43. BILLINGS S.A. *Structure Detection and Model Validity Tests in the Identification of Nonlinear Systems* // Research Report. ACSE Report 196. Department of Control Engineering, University of Sheffield, 1982. – 29 p.
44. CHEN T., OHLSSON H., LJUNG L. *On the Estimation of Transfer Functions, Regularizations and Gaussian Processes – Revisited* // Automatica. – 2012. – Vol. 48(8). – P. 1525–1535.
45. CHEN T., LJUNG L. *Implementation of Algorithms for Tuning Parameters in Regularized Least Squares Problems in System Identification* // Automatica. – 2013. – Vol. 50. – P. 2216–2220.
46. CHERNYSHOV K.R. *Tsallis Relative Entropy within Statistical Linearization Problems* // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 15. – P. 509–514.
47. CLARKE D.W., SCATTOLINI R. *Constrained Receding-Horizon Predictive Control* // Proc. IEE-Part D, Control Theory and Applications. – 1991. – Vol. 138, No. 4. – P. 347–354.
48. GUSTAVSSON I., LJUNG L., SODERSTROM T. *Identification of Processes in Closed Loop – Identifiability and Accuracy Aspects* // Automatica. – 1977. – Vol. 13, No. 1. – P. 59–75.
49. HANNAN E.J., QUINN B.G. *The Determination of the Order an Autoregression* // J. of the Royal Statistical Society, Series B. – 1979. – Vol. 41. – P. 190–195.
50. HASAN A.H., GRACHEV A.N. *On-Line Parameters Estimation Using Fast Genetic Algorithm* // J. of Electrical and Control Engineering (JECE). – 2014. – Vol. 4, No. 2. – P. 16–21.
51. HOSSEINI S.M., JOHANSEN T.A., FATEHI A. *Comparison of Nonlinearity Measures Based on Time Series Analysis for Nonlinearity Detection* // Modeling, identification and control. – 2011. – Vol. 32, No. 4. – P. 123–140.
52. KALMAN R. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* // ASME Journal of Basic Engineering. – 1960. – Vol. 82. – P. 35–45.
53. LJUNG L. *Perspectives on System Identification* // IFAC Annual Reviews. – 2010. – Spring Issue in Control. – Vol. 34(1). – P. 1–12
54. POLYAK B.T., TSYPKIN Ya.Z., *Pseudogradient Adaptation and Training Algorithms* // Automation and Remote Control – 1973. – Iss. 3. – P. 45–68.

55. PRONY G.R.B. *Essai experimental et analytique: sur lois de la dilatabilite de fluids elastques etsur celles de la force expanslve de la l'eau et la vapeur de l'alkool, a different temperatures* // J. deL'Ecole Polytechnique. –1975. –Vol. 1. – P. 24–76.
56. SÖDERSTROM T. *Comments on Order Assumption and Singularity of Information Matrix for Pulse Transfer Function Models* // IEEE Trans. Automatic Control. –1975. – Vol. AC-20. – P. 445–447.
57. SÖDERSTROM T., MAHATA K. *On Instrumental Variable and Total Least Squares Approaches for Identification of Noisy Systems* // Int. J. Control. – 2002. – Vol. 75, No. 6. – P. 381–389.
58. TUNALI E.T., TARN T.J. *New Results for Identifiability of Nonlinear Systems* // IEEE Trans. Autom. Control. – 1987. – Vol. 32. – P. 146–154.
59. WAGENMAKERS E.-J. *A Practical Solution to the Pervasive Problems of p Values* // Psychonomic Bulletin and Review. – 2007. – Vol. 14. – P. 779–804.
60. *Identifiability of Parametric Models* / Ed. by E. Walter. – New York: Pergamon Press, 1987. – 119 p.
61. ZADEH L. *On the Identification Problem* // IRE Tranc. of Circuit Theory, CT-3. – 1956. – P. 277–281.

1.4. УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ

Емельянова Ю.П.¹, Пакшин П.В.²

1. Введение

Управление с *итеративным обучением* (УИО) (в западной литературе — Iterative Learning Control, ILC) является одним из сравнительно новых направлений теории управления, для первоначального знакомства с которым можно рекомендовать обзоры [6, 15]. УИО, которое можно классифицировать как одно из направлений *интеллектуального управления*, представляет собой подход к улучшению переходных характеристик систем, которые работают в повторяющемся режиме с фиксированным интервалом повторения (см. определения ниже). Хотя теория управления предоставляет множество методов для повышения *качества процессов* в динамической системе, не всегда удается достичь желаемого уровня этого качества традиционными методами теории управления. Это может быть связано с наличием параметрических неопределенностей или возмущений и шума измерений, проявляющихся во время работы реальной системы [4]. Невозможность достичь желаемого качества процессов также может быть связана с отсутствием подходящих методов проектирования для данного класса систем [30]. В частности, когда система является нелинейной, нелегко достичь высокой точности слежения при использовании традиционных методов теории управления. Однако для класса систем, которые работают в режиме повторений, УИО позволяет преодолеть недостатки традиционных систем управления, позволяя достичь высокого качества процессов.

¹Юлия Павловна Емельянова, Арзамасский политехнический институт НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Арзамас; к.ф.-м.н., доцент (emelianovajulia@gmail.com).

²Павел Владимирович Пакшин, Арзамасский политехнический институт НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Арзамас; д.ф.-м.н., профессор (pakshinpv@gmail.com).

Отметим наиболее существенную отличительную особенность УИО. На каждом повторении происходит накопление и запоминание информации о реализованном процессе, которая затем используется на следующем шаге для улучшения качества процесса в соответствии с заданным критерием. Это напоминает процесс обучения человека повторяющимися действиями, таким как стрельба по мишени, бросание баскетбольного мяча в корзину и т.п., в котором существенную роль играет запоминание предыдущих действий, позволяющее на следующем повторении внести нужную коррекцию и улучшить результат. Эта особенность является принципиальным отличием от *управления с обратной связью* и *адаптивного управления* (см. введение В.1 и раздел 1.2), где используются лишь текущие значения переменных, характеризующих динамику процесса.

В литературе приводятся различные точки зрения на УИО. Приведем некоторые из них.

– «Концепция управления с обучением подразумевает повторяемость работы системы и возможность улучшения управляющего воздействия на основе данных с предыдущего повторения» [9].

– УИО — это «...рекурсивный онлайн-метод управления, который основывается на небольшом объеме вычислений и требует небольшого объема априорной информации о динамике системы. Идея состоит в том, чтобы повторно применять простой алгоритм к неизвестному объекту, пока не будет достигнута требуемая точность слежения» [13].

– «Управление с итеративным обучением – это подход к повышению качества переходных процессов в системе, которая работает в повторяющемся режиме с фиксированным интервалом повторения» [30].

– «Управление с итеративным обучением направлено на последовательное повышение точности систем, которые выполняют одну и ту же задачу в повторяющемся режиме» [8].

– «Управление с итеративным обучением должно использовать повторения в качестве опыта для повышения эффективности

управления системой даже при неполном знании о ней» [17].

– Управление с итеративным обучением – это «...управление, которое учится получать нулевую ошибку слежения за счет повторений командного сигнала или устранять влияние повторяющихся помех на выходе системы управления» [38].

– «Основная идея УИО состоит в итеративном нахождении входной последовательности таким образом, чтобы выходная переменная системы была как можно ближе к желаемому выходному сигналу» [29].

Приведенные точки зрения имеют некоторые различия и свои собственные акценты. Однако их общей чертой является идея «повторения». Человек узнает о своей жизненной среде на собственном опыте, где повседневная деятельность составляет физический уровень, а память о существенных событиях, связанных с его интересами, составляет ментальный уровень. Эти существенные события прошлого дают человеку *знания*, которые он использует в своей текущей деятельности. В УИО текущая деятельность заключается в управляющем воздействии, а прошлый опыт – это сохраненные данные. Разница между человеческим обучением и машинным обучением заключается в машинной «предопределенности». Для человека знания, полученные при обучении, основаны на аналогиях и впечатлениях, тогда как в машине начальные условия, фиксированная продолжительность повторения, равномерная выборка, желаемая траектория и другие элементы, определяющие будущее поведение, предопределены. Таким образом, УИО решает задачу уточнения входного воздействия на систему, которая работает в повторяющемся режиме с предопределенным будущим поведением, так чтобы улучшить ее текущую работу по сравнению с прошлой за счет использования прошлого опыта.

УИО отличается от других стратегий управления связанных с обучением, таких как адаптивное управление, нейросетевое управление и повторяющееся управление (ПУ) [28]. Стратегии адаптивного управления изменяют параметры регулятора, который является системой, тогда как УИО изменяет вход управле-

ния, который является сигналом [30]. Кроме того, адаптивные регуляторы обычно не используют информацию, содержащуюся в повторяющихся сигналах управления. Аналогично обучение нейронной сети тоже включает в себя изменение параметров регулятора, а не управляющего сигнала; в этом случае модифицируются большие сети нелинейных нейронов. Эти большие сети требуют большого объема данных для обучения, и быструю сходимость здесь часто бывает трудно гарантировать [26], тогда как УИО обычно сходится всего за несколько итераций.

УИО наиболее похоже на ПУ, за исключением того, что ПУ предназначено для непрерывной работы, тогда как УИО предназначено для пошаговой работы. Например, с помощью УИО можно управлять роботом, который выполняет задачу, возвращается в исходное положение и останавливается перед повторением задачи. В то же время типичным приложением ПУ является управление головкой чтения/записи жесткого диска, в которой каждая итерация представляет собой полный оборот диска, а следующая итерация следует сразу же за текущей итерацией. Разница между ПУ и УИО заключается в установке начальных условий для каждого повторения [28]. В УИО начальные условия устанавливаются на одно и то же значение в каждом повторении. В ПУ начальные условия устанавливаются на конечные условия предыдущего повторения. Разница в установке начальных условий приводит к различным методам анализа и результатам [28].

Рассмотрим процесс управления с итеративным обучением более детально. Пусть на вход системы подается «управляющий» («обучающий») сигнал в течение фиксированного промежутка времени, после чего система возвращается в исходное состояние, и *выходная траектория*, полученная в результате действия этого сигнала, сравнивается с *желаемой траекторией*. Полученная при этом *ошибка* используется для создания нового входного сигнала (той же продолжительности), который будет применен при следующем цикле работы системы. Этот процесс затем многократно повторяется. Цель алгоритма состоит в изменении входного сигнала от одного повторения к следующему так, чтобы с уве-

личением числа повторений выходная переменная приближалась к желаемой траектории. Основная идея УИО продемонстрирована на рис. 1.4.1.

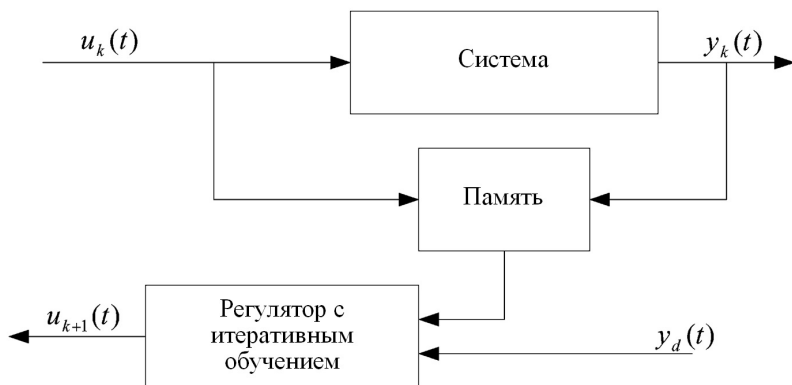


Рис. 1.4.1. Основная идея управления с итеративным обучением

Стандартные предположения состоят в том, что система возвращается к одинаковым начальным условиям в начале каждого повторения, повторение длится в течение фиксированного времени T_f , и каждое повторение имеет одинаковую продолжительность. Типичный алгоритм УИО для структуры, представленной на рис. 1.4.1, имеет вид

$$(1) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma \frac{d}{dt} e_k(t),$$

где $u_k(t)$ – входная переменная, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ – ошибка на k -м повторении, $y_k(t)$ – выходная переменная на k -м повторении, $y_d(t)$ – желаемая выходная переменная. При определенных условиях на параметр γ (см., например, [7, 17, 30]) этот алгоритм сходится в том смысле, что $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $t \in [0, T_f]$.

Преимущество, которое УИО имеет по сравнению с традиционным управлением с использованием прямой и обратной связи, заключается в возможности УИО предвидеть и с упреждением реагировать на повторяющиеся возмущения. Эта способность

зависит от причинно-следственных свойств алгоритма обучения. Чтобы описать это более подробно, рассмотрим версию (1) для дискретного времени:

$$(2) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma e_k(t+1),$$

где теперь t является дискретной переменной.

Определение 1. Алгоритм управления с итеративным обучением называется *причинным*, если $u_{k+1}(t)$ зависит только от $u_k(p)$ и $e_k(p)$ при $p \leq t$. Этот алгоритм называется *непричинным*, если $u_{k+1}(t)$ является также функцией $u_k(h)$ или $e_k(h)$ для некоторого $h > t$.

Ясно, что алгоритм (2) является непричинным. Если же

$$(3) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma e_k(t),$$

то такой алгоритм будет причинным. Особенностью непричинных алгоритмов управления с итеративным обучением является их реализуемость, поскольку для вычисления будущей ошибки они используют информацию с предыдущих повторений, которая хранится в памяти. Это ключевая особенность УИО. Более детальный ее анализ будет представлен ниже.

2. Классические алгоритмы управления с итеративным обучением

В данном разделе опишем основные идеи классических алгоритмов УИО. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, которая функционирует в повторяющемся режиме и на k -м повторении описывается следующей моделью:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t). \end{aligned}$$

Задача управления состоит в том, чтобы выходная переменная $y_k(t)$ отслеживала желаемый сигнал $y_d(t)$ на заданном конечном промежутке времени. В классической постановке принимаются следующие допущения; некоторые из них в ряде исследований удается снять или ослабить [17].

– Каждое повторение протекает в течение одного и того же фиксированного времени.

– Начальное состояние системы $x_k(0)$ одно и то же для каждого повторения.

– Динамика системы неизменна на протяжении всего времени повторения.

– Выходная переменная $y_k(t)$ доступна для измерения.

Основная идея УИО была предложена в патенте США [21] с приоритетом от 1967 года, а также в журнальной публикации 1978 года [42], написанной на японском языке. Однако эти идеи оставались не востребованными до тех пор, пока серия статей 1984 года [10, 16, 18, 27] не вызвала широкого интереса. С тех пор количество публикаций, посвященных УИО, быстро растет, и сейчас объем исследований в области управления с итеративным обучением настолько широк, что практически невозможно описать все ветви этого направления. Начальное представление могут дать уже упомянутые обзорные статьи [6, 15] и монография [7].

Алгоритм управления с итеративным обучением, предложенный в 1984 году, в настоящее время часто называют *алгоритмом Аримото* (или законом управления с итеративным обучением типа Аримото) по имени первого автора работ [10, 11]:

$$(5) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t).$$

Для этого алгоритма, примененного к (4), сходимость гарантируется, если параметр Γ удовлетворяет условию

$$(6) \quad \|I - CB\Gamma\| < 1.$$

Далее изучались более общие алгоритмы ПИД-типа [7]:

$$(7) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Phi e_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t) + \Psi \int_0^t e_k(\tau) d\tau,$$

где параметры Φ , Γ , Ψ удовлетворяют условиям, аналогичным (6). В других типах алгоритмов использовалась переменная матрица усиления G_k , для нахождения которой использовались градиентные методы:

$$(8) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + G_k e_k(t + 1).$$

3. Построение алгоритмов УИО на основе расширенных моделей

Для большей наглядности рассмотрим модель с дискретным временем и со скалярными входными и выходными переменными

$$(9) \quad \begin{aligned} x_k(t+1) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t), \end{aligned}$$

где приняты стандартные обозначения, соответствующие [4]. Известные формы УИО для (9) можно описать общим соотношением [14, 30]

$$(10) \quad u_{k+1}(t) = Q(q)[u_k(t) + L(q)e_k(t+1)],$$

где q – оператор сдвига ($qx(t) = x(t+1)$), $Q(q)$ и $L(q)$ – так называемый Q -фильтр и функция обучения соответственно, эти функции имеют вид

$$(11) \quad \begin{aligned} Q(q) &= q_{-(N-1)}q^{N-1} + q_{-(N-2)}q^{N-2} + \dots + q_{-1}q + q_0 + \\ &+ q_1q^{-1} + \dots + q_{(N-2)}q^{-(N-2)} + q_{(N-1)}q^{-(N-1)}, \\ L(q) &= l_{-(N-1)}q^{N-1} + l_{-(N-2)}q^{N-2} + \dots + l_{-1}q + l_0 + \\ &+ l_1q^{-1} + \dots + l_{(N-2)}q^{-(N-2)} + l_{(N-1)}q^{-(N-1)}. \end{aligned}$$

Располагая теперь моделью динамики системы (9), продолжим анализ свойств причинности алгоритмов УИО, начатый во введении. Связь между входной и выходной переменной в (9) можно выразить соотношением

$$(12) \quad y_k(t) = C(qI - A)^{-1}Bu_k(t) + CA^t x(0) = P(q)u_k(t) + d(t).$$

Рассматривая $d(t)$ как возмущение, вызванное ненулевыми начальными условиями, с учетом (12) запишем ошибку в виде

$$e_k(t) = y_d(t) - P(q)u_k(t) - d(t).$$

Отсюда следует, что непричинный алгоритм «предвидит» возмущение $d(t+1)$ и компенсирует его с упреждением с помощью управляющего воздействия $u_{k+1}(t)$. Причинный алгоритм не «предвидит» возмущение, поскольку $u_{k+1}(t)$ компенсирует возмущение $d(t)$ в тот же момент времени t .

Очень важным в этой связи является вопрос о возможности построения управления с обратной связью, эквивалентного

управлению с итеративным обучением. Этот вопрос обсуждался в [22, 23, 24, 33], результаты этих работ относятся к УИО с непрерывным временем, но могут быть распространены на УИО с дискретным временем. В [22, 24] показано, что при отсутствии шумов существует эквивалентная обратная связь для причинных алгоритмов управления с итеративным обучением, и, кроме того, эквивалентный регулятор с обратной связью может быть получен непосредственно из алгоритма обучения. Тем не менее существуют критические ограничения эквивалентности, которые заставляют отдать предпочтение использованию причинных алгоритмов УИО. Во-первых, эквивалентность управления с обратной связью, обсужденная в [24], ограничена сценарием без помех. Во-вторых, повышение требований к качеству УИО приводит к высокому коэффициенту усиления эквивалентного регулятора с обратной связью [24]. При наличии возмущений обратная связь с высоким коэффициентом усиления может существенно ухудшить качество и даже вывести из строя оборудование. Более того, этот эквивалентный регулятор может даже оказаться неустойчивым [33]. Поэтому эквивалентные регуляторы с обратной связью не всегда могут заменить причинные алгоритмы УИО. Непричинные УИО, как было отмечено, с упреждением реагируют на повторяющиеся помехи. За исключением особых случаев, не существует эквивалентного регулятора с обратной связью, который может обеспечить такое же качество управления, как и непричинное УИО, поскольку управление с обратной связью реагирует на текущие ошибки и не обладает свойством упреждения.

Важно также отметить, что если система обладает свойством *обратимости* (по выходной переменной можно однозначно найти входную переменную), то нулевая ошибка обучения достигается за один шаг [15], однако и в этом случае возникает проблема высокого коэффициента усиления при отсутствии свойств робастности, и алгоритмы на основе свойства обратимости, как правило, не применяются. Подробно этот интересный вопрос обсуждается в [12]. Интуитивно здесь прослеживается некоторая связь с системами М.В. Меерова [3], но обсуждение этого вопро-

са требует более глубокого и детального анализа.

Рассмотрим систему (9) и предположим, что продолжительность каждого повторения составляет N шагов и $CB \neq 0$. Последнее условие всегда выполняется, когда (9) является эквивалентной моделью (4) в моменты квантования. Обозначим $p_t = CA^{t-1}B$, $d(t) = CA^t x(0)$ и введем в рассмотрение расширенные векторы $\mathbf{y}_k = [y_k(1)^T \dots y_k(N)^T]^T$, $\mathbf{y}_d = [y_d(1)^T \dots y_d(N)^T]^T$, $\mathbf{d} = [d(1)^T \dots d(N)^T]^T$, $\mathbf{u}_k = [u_k(0)^T \dots u_k(N-1)^T]^T$ и матрицы

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_N & p_{N-1} & \dots & p_1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_{-1} & \dots & q_{-(N-1)} \\ q_1 & q_0 & \dots & q_{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N-1} & q_{N-2} & \dots & q_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_0 & l_{-1} & \dots & l_{-(N-1)} \\ l_1 & l_0 & \dots & l_{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N-1} & l_{N-2} & \dots & l_0 \end{bmatrix}.$$

Тогда в соответствии с (9), (10) имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{P}\mathbf{u}_k + \mathbf{d}, \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{Q}\mathbf{u}_k + \mathbf{L}\mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_k$. Для причинных алгоритмов УИО элементы матриц \mathbf{Q} и \mathbf{L} с отрицательными индексами равны нулю и эти матрицы становятся нижними треугольными. Кроме того, поскольку на каждой диагонали этих матриц стоят одинаковые элементы, все они являются тѐплицевыми [5].

Определение 2 [15, 32]. Система (9) с управлением (10) называется *асимптотически устойчивой*, если существует $\bar{u} \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $t = 0, 1, \dots, N-1$ и $k = 0, 1, \dots$ $|u_k(t)| \leq \bar{u}$ и для всех $t = 0, 1, \dots, N-1$ существует конечный предел $u_\infty(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t)$.

Приведем условия асимптотической устойчивости в смысле сформулированного определения, полученные в работе [32]. Подставляя во второе уравнение из (13) $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_k$ и затем первое уравнение из (13), получим следующее уравнение, описывающее динамику в области повторений (итераций):

$$(14) \quad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{P})\mathbf{u}_k + \mathbf{Q}\mathbf{L}(\mathbf{y}_d - \mathbf{d})$$

Обозначим $\lambda_i(M)$ – i -е собственное значение матрицы M , $\rho(M) = \max_i |\lambda_i(M)|$ – ее спектральный радиус. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. [32]. Система (9) с управлением (10) является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда

$$(15) \quad \rho(\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{LP})) < 1.$$

Когда Q -фильтр и функция обучения соответствуют причинному алгоритму, матрица $\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{LP})$ является нижней треугольной и тёплицевой [5] с повторяющимися собственными значениями $\lambda = q_0(1 - l_0p_1)$, и условие (15) в этом случае упрощается и принимает вид

$$(16) \quad |q_0(1 - l_0p_1)| < 1.$$

Качество управления с итеративным обучением зависит от предельного значения ошибки. Если система асимптотически устойчива, то эта ошибка определяется как

$$(17) \quad e_\infty(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_d(t) - P(q)u_k(t) - d(t)) = \\ = y_d(t) - P(q)u_\infty(t) - d(t),$$

или в терминах расширенной системы

$$(18) \quad \mathbf{e}_\infty = [\mathbf{I} - \mathbf{P}[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{LP})]]^{-1} \mathbf{QL}(\mathbf{y}_d - \mathbf{d}).$$

Качество обычно оценивается на основе разности между установившимся значением ошибки $e_\infty(t)$ и ее начальным значением $e_0(t)$ для заданной эталонной траектории. Это сравнение проводится либо на основе качественного анализа [10], либо количественно на основе средних квадратических значений ошибки, вычисленных вдоль каждого повторения [31].

Таким образом, задача построения алгоритма УИО сводится к выбору Q -фильтра $Q(q)$ и функции обучения $L(q)$ из условий асимптотической устойчивости и требуемого качества обучения. Для этой цели могут быть использованы любые подходящие методы теории управления [4].

Во многих случаях к алгоритму УИО предъявляются требования, чтобы он обеспечивал сходимость ошибки обучения к нулю ($e_\infty(t) = 0$) для всех t , независимо от конкретного вида желаемой траектории $y_d(t)$ или повторяющегося возмущения. Следу-

ющий результат, полученный в [37], дает необходимые и достаточные условия сходимости ошибки обучения к нулю.

Теорема 2. [38]. *Предположим, что P и L не равны тождественно нулю. Тогда для системы (9) с управлением (10) $e_\infty(t)=0$ для всех t и для всех u_d и d тогда и только тогда, когда эта система асимптотически устойчива и $Q(q) = 1$.*

В соответствии с результатом теоремы 2 многие алгоритмы УИО не включают Q -фильтрацию и в них $Q(q) = 1$. Теорема 2 утверждает, что это необходимо для идеального воспроизведения желаемой траектории. Однако Q -фильтрация может улучшить переходные характеристики и придает процессу обучения робастные свойства. Более детально вопросы робастности обсуждаются в [7].

4. Построение алгоритмов УИО на основе 2D-моделей

При управлении с итеративным обучением естественным образом выделяется два динамических процесса: процесс протекания отдельного повторения и процесс перехода от одного повторения к другому. Такая особенность динамики позволяет описать системы управления с итеративным обучением так называемыми *2D-моделями* и далее использовать для анализа и синтеза управления с итеративным обучением теорию, развитую для этих моделей [40]. 2D-модели появились в теории управления в связи с задачами обработки изображений (модель Роессера) [39] и построения многомерных цифровых фильтров (модель Форназини – Маркезини) [19, 20]. Они отличаются от обычных моделей систем тем, что их состояние определяется двумя независимыми переменными, роль которых может играть время и координата в пространстве в распределенных системах, время на отдельном повторении и номер повторения в рассматриваемых задачах УИО и т.п. Модели, к которым сводятся системы управления с итеративным обучением, получили название *повторяющихся процессов*. Они близки к моделям Роессера и отличаются лишь некото-

рыми деталями [40]. Далее построение 2D-модели в форме повторяющегося процесса будет рассмотрено детально.

Рассмотрим систему (9) не ограничиваясь более скалярной формой входного и выходного сигналов, то есть полагая $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$. Будем предполагать, что $CB \neq 0$. Последовательность $u_k(t)$, $k = 1, \dots$, при заданном граничном условии $u_0(t)$ будем формировать в соответствии с общим алгоритмом управления с итеративным обучением

$$(19) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Delta u_{k+1}(t),$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ — корректирующая поправка к управлению на текущем шаге, конкретный вид которой будет уточнен далее. Ошибку обучения, как обычно, определим выражением

$$(20) \quad e_k(t) = y_d(t) - y_k(t), \quad k = 0, 1, \dots,$$

и введем в рассмотрение приращения вектора состояния и вектора выходных переменных

$$(21) \quad \xi_{k+1}(t+1) = x_{k+1}(t) - x_k(t), \quad \eta_{k+1}(t+1) = y_{k+1}(t) - y_k(t).$$

Динамика системы в терминах ошибки и приращения состояния опишется уравнениями

$$(22) \quad \begin{aligned} \xi_{k+1}(t+1) &= A\xi_{k+1}(t) + Bv_{k+1}(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1, \\ e_{k+1}(t) &= -CA\xi_{k+1}(t) + e_k(t) - CBv_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $v_{k+1}(t) = \Delta u_{k+1}(t-1)$. Если корректирующую поправку $\Delta u_{k+1}(t-1)$ выбрать из условия $e_k(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $1 \leq t \leq N$ при выполнении ограничения $|u_k(t)| < \infty$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то в пределе при $k \rightarrow \infty$ будет достигнуто идеальное воспроизведение желаемой траектории. Зададим корректирующую поправку в виде

$$(23) \quad \Delta u_{k+1}(t) = v_{k+1}(t+1) = K_1\eta_{k+1}(t+1) + K_2e_k(t+1).$$

При этом алгоритм управления с итеративным обучением примет вид

$$(24) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + K_1(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + K_2e_k(t+1).$$

Система (22) относится к классу 2D-моделей, известных под названием *повторяющиеся процессы*. Подставляя (23) в (22) получим 2D-модель системы с УИО в форме повторяющегося процесса:

$$(25) \quad \begin{aligned} \xi_{k+1}(t+1) &= (A + BK_1C)\xi_{k+1}(t) + BK_2e_k(t), \\ e_{k+1}(t) &= -C(A + BK_1C)\xi_{k+1}(t) + (I - CBK_2)e_k(t). \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$(26) \quad \bar{\xi} = [\xi^T \ e^T]^T, \quad K = [K_1 \ K_2],$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Определение 3. Повторяющийся процесс (25) называется экспоненциально устойчивым, если существуют числа $\kappa > 0$ и $0 < \rho < 1$, такие что

$$(27) \quad |\xi_k(t)|^2 + |e_k(t)|^2 \leq \kappa \rho^{k+t},$$

где κ и ρ не зависят от N .

Для экспоненциально устойчивого процесса (25) будет достигнуто идеальное воспроизведение желаемой траектории при $k \rightarrow \infty$ и будет выполнено указанное выше ограничение на управление.

Универсальным методом анализа устойчивости систем является второй метод Ляпунова. Однако уравнения (25) не разрешены относительно полных приращений переменных состояния и применить этот метод непосредственно невозможно. Для преодоления этой трудности в [1, 35, 36] разработан так называемый *дивергентный метод векторных функций Ляпунова*, в котором, в отличие от классической версии, устойчивость устанавливается на основе свойств дивергенции (дискретного аналога дивергенции) указанных векторных функций. В рассматриваемом случае введем векторную функцию Ляпунова следующим образом:

$$(28) \quad V(\xi_{k+1}(t), e_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(\xi_{k+1}(t)) \\ V_2(e_k(t)) \end{bmatrix},$$

где $V_1(\xi_{k+1}(t)) > 0$, $\xi_{k+1}(t) \neq 0$, $V_2(e_k(t)) > 0$, $e_k(t) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$. Аналог дивергенции этой функции определим как

$$(29) \quad \mathcal{D}V(\xi_{k+1}(t), e_k(t)) = \Delta_t V_1(\xi_{k+1}(t)) + \Delta_k V_2(e_k(t)),$$

где

$$\Delta_t V_1(\xi_{k+1}(t)) = V_1(\xi_{k+1}(t+1)) - V_1(\xi_{k+1}(t)),$$

$$\Delta_k V_2(e_k(t)) = V_2(e_{k+1}(t)) - V_2(e_k(t)).$$

Важно отметить, что использовании векторных функций Ляпунова здесь принципиально отличается от концепции В.М. Матросова [2]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. [35]. *Повторяющийся процесс (25) является экспоненциально устойчивым, если существует функция (28) и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 , такие что*

$$\begin{aligned} c_1|\xi_{k+1}(t)|^2 &\leq V_1(\xi_{k+1}(t)) \leq c_2|\xi_{k+1}(t)|^2, \\ c_1|e_k(t)|^2 &\leq V_2(e_k(t)) \leq c_2|e_k(t)|^2, \\ DV(\xi_{k+1}(t), e_k(t)) &\leq -c_3(|\xi_{k+1}(t)|^2 + |e_k(t)|^2). \end{aligned}$$

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (28) в виде квадратичных форм

$$V_1(\xi_{k+1}(t)) = \xi_{k+1}(t)^T P_1 \xi_{k+1}(t), \quad V_2(e_k(t)) = e_k(t)^T P_2 e_k(t),$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$, и потребуем выполнения неравенства

$$(30) \quad DV(\xi_{k+1}(t), e_k(t)) \leq -[\xi_{k+1}(t)^T Q_1 \xi_{k+1}(t) + e_k(t)^T Q_2 e_k(t) + v_{k+1}(t)^T R v_{k+1}(t)],$$

где Q_1, Q_2 и R – положительно определенные матрицы. Вычислим $DV(\xi_{k+1}(t), e_k(t))$ в силу системы (25) с учетом введенных ранее обозначений:

$$(31) \quad DV(\xi_{k+1}(t), e_k(t)) = \bar{\xi}^T [(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})^T P(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) - P] \bar{\xi},$$

где $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$. Тогда соотношение (30) можно переписать в виде

$$(32) \quad DV(\xi_{k+1}(t), e_k(t)) = \bar{\xi}^T [(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})^T P(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) - P + Q + \bar{C}^T K^T R K \bar{C}] \bar{\xi} \leq 0,$$

Неравенство (32) эквивалентно билинейному матричному неравенству

$$(33) \quad P - (\bar{A} + \bar{B}K\bar{C})^T P(\bar{A} + \bar{B}K\bar{C}) - Q - \bar{C}^T K^T R K \bar{C} \succeq 0.$$

Билинейное матричное неравенство (33) будет выполнено, если система линейных матричных неравенств и уравнений

$$X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0,$$

$$(34) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}X + \bar{B}Y\bar{C})^T & X & (Y\bar{C})^T \\ \bar{A}X + \bar{B}Y\bar{C} & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y\bar{C} & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ \bar{C}X = Z\bar{C}$$

разрешима относительно переменных X , Y , Z . При этом $K = YZ^{-1}$. Матрицы Q и R играют здесь ту же самую роль, что и весовые матрицы в задаче о линейно-квадратичном регуляторе. За счет их выбора можно изменять скорость сходимости ошибки обучения к нулевому значению.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим порталный робот из лаборатории университета Саутгемптона [25]. Робот захватывает предметы из заданной области и устанавливает их с требуемой точностью на конвейер. Желаемая пространственная траектория движения представлена на рис. 1.4.2.

Для реализации этой траектории управление осуществляется по трем ортогональным осям. Для описания динамики движения по каждой из осей экспериментально получены передаточные функции. Ограничимся построением управления с итеративным обучением по горизонтальной оси, перпендикулярной направлению движения конвейера. Желаемая траектория движения $y_d(t) = y_{ref}(t)$ вдоль этой оси представлена на рис. 1.4.3, а передаточная функция от управления к перемещению имеет вид

$$(35) \quad G_y(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{23,7356(s + 661,2)}{s(s^2 + 426,7s + 1,744 \cdot 10^5)}.$$

Управление будем строить в рамках дискретной модели состояния. В рассматриваемом случае период дискретности $T_s = 0,01$ с.

Параметры дискретной модели состояния получим с помощью стандартных функций `ss` и `c2d` пакета MATLAB. В качестве меры точности воспроизведения желаемой траектории введем в рассмотрение среднеквадратическую ошибку обучения

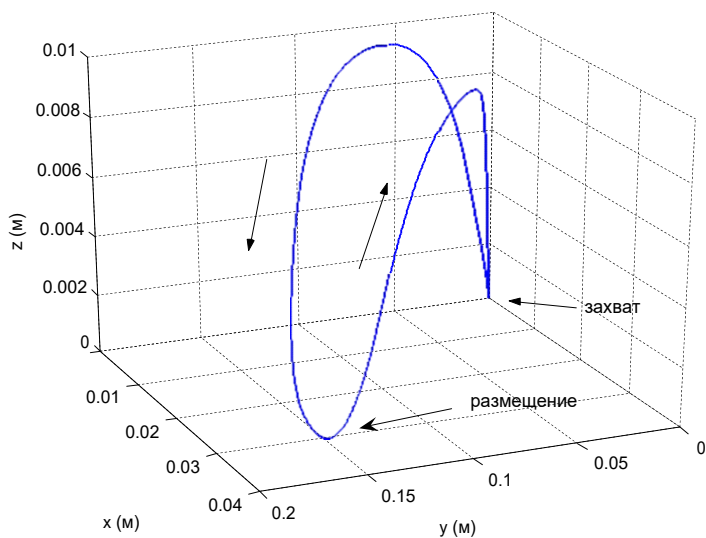


Рис. 1.4.2. Желаемая пространственная траектория движения портального робота

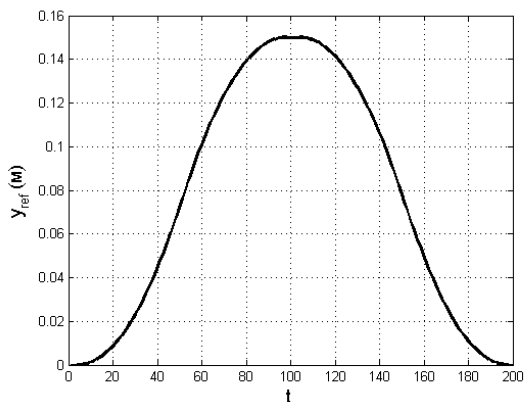


Рис. 1.4.3. Желаемая траектория движения портального робота по оси y

$$(36) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N |e_k(t)|^2}.$$

Выбирая $Q = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 50]$ и $R = 10^{-3}$, получим $K = [-962,2 \ 185,27]$. При этом ошибка обучения уменьшается в 10 раз менее чем за 10 повторений (рис. 1.4.4). Алгоритм управления имеет вид

$$(37) \quad u_k(t) = u_{k-1}(t) + K_1(y_k(t) - y_{k-1}(t)) + K_2(y_{ref}(t+1) - y_{k-1}(t+1)).$$

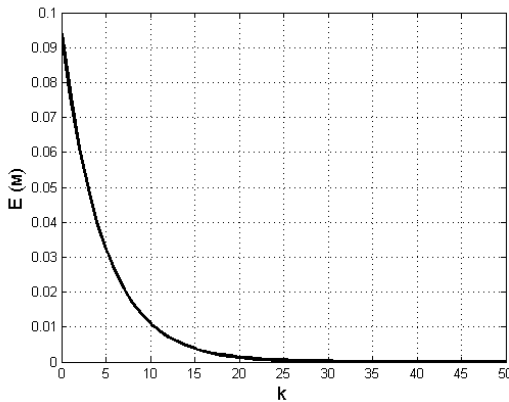


Рис. 1.4.4. Изменение среднеквадратической ошибки обучения в зависимости от числа повторений

В соответствии с приведенной ранее классификацией алгоритм (37) является непричинным и для него не существует эквивалентного управления с обратной связью. На рис. 1.4.5–1.4.7 для большей наглядности представлены трехмерные графики изменения управления, выходной переменной и ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

При использовании статической обратной связи по выходу

$$(38) \quad u_k(t) = F(y_{ref}(t) - y_k(t)),$$

где F – матрица обратной связи, уравнение замкнутой системы принимает вид

$$(39) \quad x_k(t+1) = (A - BFC)x_k(t) + BFy_{ref}(t).$$

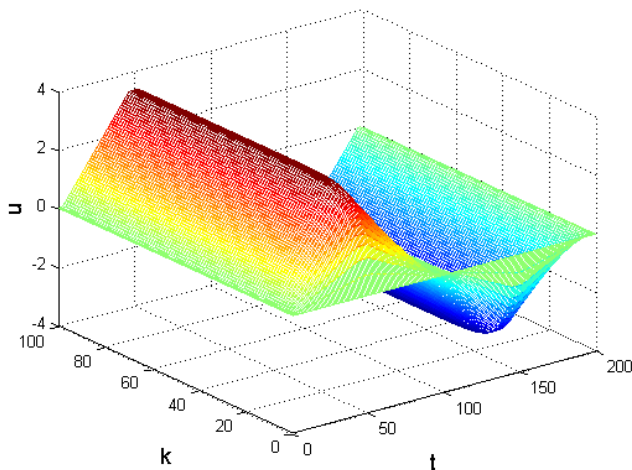


Рис. 1.4.5. Изменение управления в зависимости от числа повторений

При этом ошибка $e_k(t)$ не будет меняться от повторения к повторению и, поскольку $y_{ref}(t)$ в масштабе рассматриваемой системы не является медленно меняющимся сигналом, она будет существенна за счет большой динамической ошибки, в то время как в случае УИО она монотонно стремится к нулю при возрастании числа повторений. Использование динамической обратной связи по выходу принципиально не изменит ситуацию, поскольку коррекция управления, направленная на компенсацию динамической ошибки, по-прежнему будет отсутствовать. Заинтересованный читатель может синтезировать управление (38), используя, например, технику ЛМН из [4], и провести сравнительный анализ. Все необходимые числовые данные для этого представлены выше.

1.4. Управление с итеративным обучением

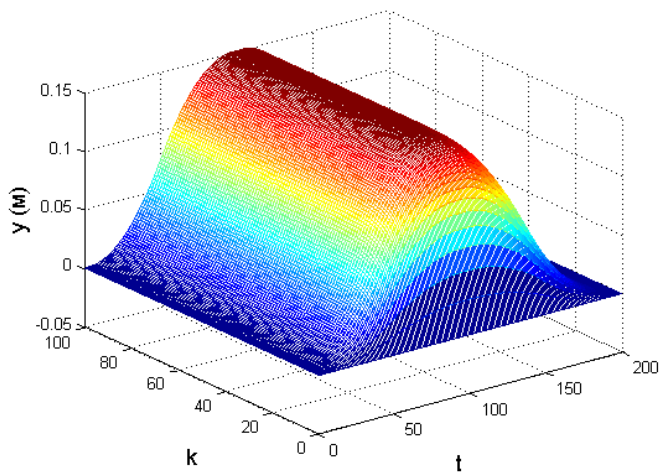


Рис. 1.4.6. Изменение выходной переменной в зависимости от числа повторений

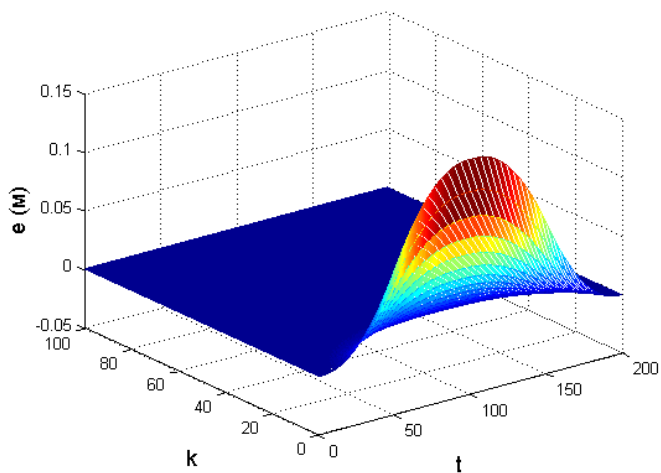


Рис. 1.4.7. Изменение ошибки обучения в зависимости от числа повторений

6. Заключение

Практически на всех крупных международных конференциях по управлению организуются регулярные или приглашенные сессии, посвященные теории и приложениям управления с итеративным обучением, поэтому охватить эту тематику в полном объеме не представляется возможным даже профессионально работающим в этом направлении исследователям. В то же время в этом направлении за сравнительно короткий период опубликован ряд монографий, по которым будут полезны приводимые далее рекомендации. Желающим углубленного изучения теории можно рекомендовать современную монографию [34] и более раннюю [43]. Читатели, интересующиеся приложениями и практическими примерами, могут обратиться к [44, 45]. Совсем недавно вышла монография [41], которую можно рекомендовать профильным специалистам. Кроме того, выше уже упоминались более ранние работы [14, 17, 30].

Литература

1. ГАЛКОВСКИЙ К., ЕМЕЛЬЯНОВ М.А., ПАКШИН П.В., РОДЖЕРС Э. *Векторные функции Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации дифференциальных повторяющихся процессов* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2016. – №4. – С. 5–17.
2. МАТРОСОВ В.М. *Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем.* – М.: Физматлит, 2001. – 373 с.
3. МЕЕРОВ М.В. *Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности.* – М.: Физматгиз, 1959. – 282 с.
4. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие.* – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
5. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 656 с.

6. AHN HYO-SUNG, CHEN YANG QUAN, MOORE K.L. *Iterative Learning Control: Brief Survey and Categorization* // IEEE Trans. Syst., Man, Cybernet. Part C: Applications and Reviews. – 2007. – Vol. 37, No. 6. – P. 1099–1121.
7. AHN H.S., MOORE K.L., CHEN Y.Q. *Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems*. – London: Springer-Verlag, 2007. – 230 p.
8. AMANN N., OWENS D.H., ROGERS E. *Iterative learning Control for Discrete-Time Systems with Exponential Rate of Convergence* // IEEE Proc. Control Theory and Applications. – 1996. – Vol. 143(2). – P. 217–224.
9. ARIMOTO S., KAWAMURA S., MIYAZAKI F. *Convergence, Stability and Robustness of Learning Control Schemes for Robot Manipulators* // In: Recent Trends in Robotics: Modelling, Control, and Education / M.J. Jamishidi, L.Y. Luh, M. Shahinpoor (eds.). – New York: Elsevier, 1986. – P. 307–316.
10. ARIMOTO S., KAWAMURA S., MIYAZAKI F. *Bettering Operation of Robots by Learning* // J. Robot. Syst. – 1984. – Vol. 1. – P. 123–140.
11. ARIMOTO S., KAWAMURA S., MIYAZAKI F. *Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems* // Proc. of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, December, 1984. – P. 1064–1069.
12. ARIMOTO S., NANIWA T. *Equivalence Relations Between Learnability, Output-Dissipativity and Strict Positive Realness* // Int. J. Control. – 2000. – Vol. 73. – P. 824–831.
13. BIEN Z., HUH K.M. *Higher-Order Iterative Learning Control Algorithm* // IEEE Proc., Part D, Control Theory and Applications. – 1989. – P. 105–112.
14. BIEN Z., XU J.-X. *Iterative Learning Control: Analysis, Design, Integration and Applications*. – Boston: Kluwer, 1998. – 372 p.

15. BRISTOW D.A., THARAYIL M., ALLEYNE A.G. *A Survey of Iterative Learning Control* // IEEE Control Syst. Magazine. – 2006. – Vol. 23, No. 3. – P. 96–114.
16. CASALINO G., BARTOLINI G. *A Learning Procedure for the Control of Movements of Robotic Manipulators* // Proc. IASTED Symp. Robot. Automat. – 1984. – P. 108–111.
17. CHEN Y.Q., WEN C. *Iterative Learning Control: Convergence, Robustness and Applications* // Lecture Notes on Control and Information Science. – Vol. LNCIS-248. – London: Springer-Verlag, 1999. – 199 p.
18. CRAIG J.J. *Adaptive Control of Manipulators through Repeated Trials* // Proc. Amer. Contr. Conf. – 1984. – P. 1566–1573.
19. FORNASINI E., MARCHESINI G. *Doubly Indexed Dynamical Systems: State Models and Structural Properties* // Mathematical Systems Theory. – 1978. – Vol. 12. – P. 59–72.
20. FORNASINI E., MARCHESINI G. *Stability Analysis of 2D Systems* // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1980. – Vol. 27. – P. 1210–1217.
21. GARDEN M. *Learning Control of Actuators in Control Systems*. – U.S. Patent 3555252, 1971.
22. GOLDSMITH P.B. *The Fallacy of Causal Iterative Learning Control* // Proc. 40th IEEE Conf. Decision Contr. – 2001. – P. 4475–4480.
23. GOLDSMITH P.B. *Author's Reply to "Comments on "On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control"* // Automatica. – 2004. – Vol. 40, No. 5. – P. 899–900.
24. GOLDSMITH P.B. *On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control* // Automatica. – 2002. – Vol. 38, No. 4. – P. 703–708.
25. HLADOWSKI L., GALKOWSKI K., CAI Z., ROGERS E., FREEMAN C., LEWIN P. *Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance* // Control Eng. Pract. – 2010. – Vol. 18. – P. 339–348.

26. HUNT K.J., SBARBARO D., ZBIKOWSKI R., GAWTHROP P.J. *Neural Networks for Control Systems – A Survey* // Automatica. – 1992. – Vol. 28. – P. 1083–112.
27. KAWAMURA S., MIYAZAKI F., ARIMOTO S. *Iterative Learning Control for Robotic Systems* // Proc. Int. Conf. Ind. Electron., Contr. and Instrum. – 1984. – P. 393–398.
28. LONGMAN R.W. *Iterative Learning Control and Repetitive Control for Engineering Practice* // Int. J. Contr. – 2000. – Vol. 73. – P. 930–954.
29. MARKUSSON O., HJALMARSSON H., NORRLÖF M. *Iterative Learning Control of Nonlinear Non-Minimum Phase Systems and its Application to System and Model Inversion* // Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, December, 2001. – P. 4481–4482.
30. MOORE K.L. *Iterative Learning Control for Deterministic Systems. Advances in Industrial Control.* – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. – 152 p.
31. MOORE K.L., CHEN Y., BAHL V. *Monotonically Convergent Iterative Learning Control for Linear Discrete-Time Systems* // Automatica. – 2005. – Vol. 41, No. 9. – P. 1529–1537.
32. NORRLOF M., GUNNARSSON S. *Time and Frequency Domain Convergence Properties in Iterative Learning Control* // Int. J. Contr. – 2002. – Vol. 75, No. 14. – P. 1114–1126.
33. OWENS D.H., ROGERS E. *Comments on “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control”* // Automatica. – 2004. – Vol. 40, No. 5. – P. 895–898.
34. OWENS D.H. *Iterative Learning Control. An Optimization Paradigm.* – London: Springer-Verlag, 2016. – 456 p.
35. PAKSHIN P., EMELIANOVA J., EMELIANOV M., GALKOWSKI K., ROGERS E. *Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes* // Syst. & Control Lett. – 2016. – Vol. 91. – P. 14–20.

36. PAKSHIN P., EMELIANOVA J., EMELIANOV M., GALKOWSKI K., ROGERS E. *Passivity Based Stabilization of Repetitive Processes and Iterative Learning Control Design* // Syst. & Control Lett. – 2018. – Vol. 122. – P. 101–108.
37. PHAN M.Q., LONGMAN R.W., MOORE K.L. *Unified Formulation of Linear Iterative Learning Control* // Adv. Astronautical Sci. – 2000. – Vol. 105. – P. 93–111.
38. PHAN M.Q., LONGMAN R.W., MOORE K.L. *Unified Formulation of Linear Iterative Learning Control* // Advances in the Astronautical Sciences. – 2000. – Vol. 105-I. – P. 93–111.
39. ROESSER R.P. *A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1975. – Vol. AC-20. – P. 1–10.
40. ROGERS E., GALKOWSKI K., OWENS D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes* // Lect. Notes Control Inform. Sci. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – Vol. 349. – 466 p.
41. SHEN D. *Iterative Learning Control with Passive Incomplete Information. Algorithms Design and Convergence Analysis.* – Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2018. – 294 p.
42. UCHIYAMA M. *Formation of High-Speed Motion Pattern of a Mechanical Arm by Trial* // Trans. Soc. Instrument Contr. Engineers. – 1978. – Vol. 14, No. 6. – P. 706–712.
43. XU J.X., TAN Y. *Linear and Nonlinear. Iterative Learning Control.* – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
44. XU J.X., PANDA S.K., LEE T. H. *Real-Time Iterative Learning Control. Design and Applications.* – London: Springer-Verlag, 2009. – 193 p.
45. WANG D., YE Y., ZHANG B. *Practical Iterative Learning Control with Frequency Domain Design and Sampled Data Implementation.* – Singapore: Springer Science+Business Media, 2014. – 226 p.

ГЛАВА 2. ОПТИМИЗАЦИЯ

2.1. ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Тремба А.А.¹

1. Где найти большую размерность (и чего нет в данном разделе)

Термин «большая размерность» отражает один из аспектов сложности, связанных с анализом и управлением в *крупномасштабных* (Large-Scale) *системах*. В принципе, любая задача управления может получить такую характеристику – либо косвенно, вследствие усложнения постановки, либо явно, с увеличением размерности. Часто решение таких задач связано с оптимизаций в том или ином виде, тем самым попадая в круг *задач оптимизации большой размерности* (Large-Scale Optimization).

В этом разделе акцент делается не на тип изучаемых систем и подходов, а на частный тип решаемой задачи. Именно, рассматриваются задачи оптимизации, ключевым свойством которых является большая (или огромная, Huge) размерность переменной или ограничений². Эта особенность может значительно ограничить применение классических методов оптимизации. Некоторые источники подобных задач:

¹ Андрей Александрович Тремба, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; к.ф.-м.н. (atremba@ipu.ru).

² Говоря об анализе «больших данных» (Big Data), невозможно не упомянуть «машинное обучение» (Machine Learning) – область, обособившуюся в отдельную науку, а исторически появившуюся на стыке теории управления и исследования операций. Возникающие в ней задачи часто имеют фиксированную структуру и потому требуют специализированных алгоритмов.

- 1) идентификация и оптимальное управление (даже простыми) системами на длительных интервалах времени;
- 2) анализ и управление распределёнными физическими системами;
- 3) анализ и управление внутренне сложными или крупными системами, в том числе с сетевыми, иерархическими и комплексированными моделями;
- 4) моделирование «сложных» задач с помощью множества «простых».

В первых двух случаях высокая размерность получается «размножением» переменных состояния по времени, исходно дискретному или дискретизированному, либо по пространству. Та или иная дискретизация необходима, в том числе, для получения численного решения в бесконечномерных задачах, не имеющих, как правило, аналитических решений [7]. Зачастую всплеск размерности происходит из-за переформулировки задачи и/или ограничений, например, приведением в удобный для численного решения формат или в случае аппроксимации задачи. Последнее, в частности, применяется для решения робастных и стохастических задач управления¹.

Любопытно, что методы оптимизация и задачи управления связаны не односторонней связью (метод оптимизации как средство решения задач теории управления). Для анализа сходимости численных алгоритмов оптимизации можно использовать методы анализа динамических систем [28]. Развитие этого интересного подхода остаётся открытой задачей.

¹Если необходимо решить задачу, гарантируя выполнение ряда условий (например, в робастном анализе/управлении) для целого множества «ограничений», то плодотворно случайно выбрать достаточно большое число экземпляров ограничений («сценариев») и решать задачу, удовлетворяющую всем выбранным ограничениями [31]. Размерность при этом возрастает кратно числу выбранных экземпляров, но задача становится более простой по структуре.

1.1. ОСОБЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Несколько важных случаев оставлены за рамками раздела, в частности оптимизация в распределённых и сетевых системах. В таких системах анализируемый или управляемый объект либо принципиально образует графовую структуру (например, состоит из физически разделённых объектов/агентов), либо распределённость вводится специально (установка системы датчиков, формирование покрывающей сети, независимость или локальность принятия решений, дискретизация бесконечномерных систем). При этих ограничениях даже классические понятия устойчивости, идентифицируемости и управляемости приходится переосмысливать, а задачи управления приобретают «сетевую» специфику. Для знакомства с такими системами и задачами см. главу 3.

Не затронуты вопросы дискретной оптимизации и распределённой оптимизации (см. следующий раздел 2.2), равно как не рассматривается усложнение задачи из-за многоуровневой оптимизации. Не рассмотрены особые классы задач, возникающие в (многошаговых) играх нескольких игроков, как и задача многокритериальной оптимизации. Существенные классы стохастических алгоритмов и стохастических задач в целом также остались за рамками раздела.

Поскольку сложность задачи определяется размерностью, рассматриваются только конечномерные и выпуклые задачи оптимизации. Последнее условие ограничивает класс задач, однако является вполне разумным с точки зрения *гарантированной* вычислимости решения. Для введения в теорию невыпуклых задач см. раздел 2.3. Помимо изложенных в нем подходов решения существует огромный класс вероятностных алгоритмов, самыми известными из которых являются генетический алгоритм и метод отжига. Оптимизация невыпуклых функций (*глобальная оптимизация*, Global Optimizaton) зачастую опирается на эвристики¹, «заимствованные» у природных явлений или поведения жи-

¹ Не-эвристические подходы используют модификации метода вет-

вотных (Nature-Inspired Algorithms). Некоторые из программных пакетов, упомянутых в последнем подразделе раздела, позволяют решать и невыпуклые задачи, но без гарантий нахождения глобального минимума.

Поскольку упор сделан на общие принципы, а не детализацию подробностей, то описание методов даётся в кратком, схематичном виде; некоторые условия (существование решения, ограниченность функции и пр.) подразумеваются выполненными, акцент сделан на общее, характерное поведение методов. Изложение специально ведётся не всегда строгим языком, ставя цель ознакомить с существом вопроса. Многочисленные сноски содержат справочную информацию и пояснения. Предполагается, что читатель знаком с обозначениями линейной алгебры.

Наконец, этот раздел не заменяет ни классических и современных учебников и книг по оптимизации, таких как [1, 2, 5, 11, 12, 26] и пр., ни монографий по численным методам решения задач управления [7] и др.

1.2. СТРУКТУРА РАЗДЕЛА

После общего введения проводится обзор численных методов и принципов оптимизации, далее следует часть, описывающая их применимость к задачам большой размерности. Завершает раздел краткий обзор программных средств оптимизации.

2. Постановка задачи

Итак, требуется решить *выпуклую*¹ задачу оптимизации

$$(1) \quad \begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ & x \in Q_j \\ & g_i(x) \leq 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

вей и границ, а потому эффективны только в малоразмерных случаях (до десятков переменных).

¹Выпуклость по существу обеспечивает «решаемость» задачи [4]. Задачи управления в [6] зачастую именно таковы. Существуют и эффективно решаемые невыпуклые задачи; на практике невыпуклые задачи часто аппроксимируют выпуклыми («релаксируют»).

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $b \in \mathbb{R}^r$, $j = 1, \dots, \ell$, $i = 1, \dots, m$, и хотя бы одно из чисел n, ℓ, m или r велико. Точки, удовлетворяющие всем ограничениям, называют *допустимыми*, обозначим их множество как

$$\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in Q_j, j = 1, \dots, \ell, g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, Ax = b\}.$$

Далее свойства функций и множеств будут уточнены для частных случаев. Выпуклость задачи¹ означает *выпуклость* целевой функции $f(x)$, функций, задающих ограничения $g_i(x)$, и множеств Q_j . Для отдельного множества это означает, что для любых двух точек x, z , лежащих в этом множестве, соединяющий их отрезок также лежит в этом множестве: $\forall x, z \in Q_j : \alpha x + (1 - \alpha)z \in Q_j$, $\alpha \in [0, 1]$. Для функций аналогичное свойство выражается неравенством

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)z) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(z), \alpha \in [0, 1].$$

Отметим, что *линейные* равенства в виде системы линейных уравнений $Ax = b$, задающие аффинное множество, по сути являются единственным способом задать выпуклое множество функциональными уравнениями-равенствами. Система линейных ограничений типа неравенства $Cx \leq d$ также задаёт выпуклое множество. Векторные неравенства понимаются покомпонентными, то есть $\sum_{j=1, n} C_{i,j}x^{(j)} \leq d^{(i)}$. Верхним индексом в скобках обозначены компоненты вектора, чтобы отличать их от номера итерации – нижнего индекса.

Существуют правила, позволяющие конструктивно (алгоритмически) проверить достаточные условия того, является ли сложная, композитная функция или множество выпуклым. *Дисциплинированное выпуклое программирование* (Disciplined Convex Programming), реализованное в пакете `cvx`, позволяет пользователю составлять и конструировать выпуклые функции и множества, что существенно расширяет тип решаемых задач, выходя за рамки линейного, квадратичного и полуопределённого программирования [17, 21].

¹ *Выпуклая задача может быть задана и другим способом, например набором невыпуклых ограничений. Однако редко когда можно обнаружить и, главное, использовать эту выпуклость.*

Перечислим важные частные случаи: задача без ограничений (безусловная минимизация)¹)

$$(2) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

задача линейного программирования вида

$$(3) \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ Ax = & b \\ Cx \leq & d \end{aligned}$$

задача квадратичного программирования с положительно полуопределённой² матрицей $Q \succcurlyeq 0$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ Ax = & b \\ Cx \leq & d \end{aligned}$$

и задача полуопределённого программирования (Semi-Definite Programming, SDP) с симметричными матрицами $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i = 0, \dots, n$:

$$(4) \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x. \\ Ax = & b \\ A_0 + \sum_{i=1}^n x^{(i)} A_i \preccurlyeq & 0 \end{aligned}$$

Последняя задача включает в себя все предыдущие, однако правильная идентификация типа задачи упрощает решение. Узкоспециализированные решатели (Solvers) могут справиться с задачей своего класса быстрее и эффективнее, чем решатели общего вида, в том числе позволив сформулировать и обработать задачу большей размерности.

¹ В противовес задачам условной минимизации – с ограничениями. Ограничения могут появиться неявно из-за области определения функции, не совпадающей со всем пространством.

² Обозначение $Q \succcurlyeq 0$ означает неотрицательность квадратичной формы $x^T Q x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$; отрицательно полуопределённые матрицы определяются аналогично. Матрицы являются симметричными.

2.1. СТРУКТУРА МЕТОДОВ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Итак, задача минимизации состоит в минимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве \mathbb{X} , то есть нахождении точки $x^* : f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{X}$. Часто используется обозначение $f^* \doteq f(x^*)$. Для простоты предполагаем, что минимум достигается¹, а также единственность точки минимума².

Существует два различных подхода к нахождению минимума. В обоих строится последовательность точек $\{x_k\}, k = 0, 1, \dots$, сходящаяся к x^* по значению (сильная сходимость, $x_k \rightarrow x^*$) или по функции (слабая сходимость, $f(x_k) \rightarrow f(x^*)$).

В одном из подходов предлагается искать релаксационную последовательность, то есть последовательно находя всё меньшие и меньшие значения целевой функции: $f(x_{k+1}) < f(x_k), k = 0, 1, \dots$. Во втором подходе допускается нарушать это условие, но взамен требуется сходимость «рекордного» значения (наилучшего среди всех предыдущих) функции к оптимальному: $\min_{j=0, \dots, k} f(x_j) \rightarrow f(x^*)$.

Во многих случаях методы организованы по схеме «направление + шаг»: последовательно выбираются направление p_k , а затем длина шага γ_k , что порождает итерации $x_{k+1} = x_k + \gamma_k p_k$.

2.2. БАЗОВЫЕ МЕТОДЫ

Два следующих метода не применимы к задачам большой размерности напрямую, но играют принципиальную роль в выпуклой оптимизации. Первый метод – одномерной минимизации, он же *одномерный поиск* (Line Search) – распространённый вспомогательный инструмент в задачах любой размерности. Вторым – *метод внутренней точки*, показавший эффективность использования метода Ньютона в задачах условной минимизации.

Скалярная переменная, метод нулевого порядка.

Для одномерной выпуклой минимизации на отрезке

¹ Что верно для замкнутого ограниченного \mathbb{X} и непрерывной функции $f(\cdot)$.

² В противном случае речь идёт о множестве решений X^* , и сходимость надо понимать как сходимость к этому множеству.

$\min_{\gamma \in [a, b]} \Phi(\gamma)$ используется *метод золотого сечения*¹. Он не требует знания производной и имеет сложность $\varepsilon(N) = (b - a)(\frac{1}{\varphi})^{N-1} = O(q^N)$ с показателем геометрической прогрессии, связанным с числом золотого сечения: $q = \frac{1}{\varphi} = 0,618\dots$ Данная скорость сходимости называется линейной, так как с каждым шагом точность по γ увеличивается кратно одной и той же величине, $N(\varepsilon) = \log_{\varphi}(\frac{b-a}{\varepsilon}) + 1 = O(\ln \frac{1}{\varepsilon})$. Линейная скорость является очень хорошей². Аналогичные свойства имеет метод Фибоначчи [5]. Знание производной может ускорить сходимость, но стоит ли это ускорение «платы» в виде лишних вычислений градиента, зависит от задачи. Важнейшим применением является вычисление длины шага³ γ при минимизации вдоль направления $\Phi(\gamma) = f(x_k + \gamma p_k)$.

Использование второй производной.

Самыми эффективными алгоритмами оптимизации для задачи с общими ограничениями на сегодняшний день, по-видимому, являются методы внутренней точки (Interior Point Methods), аппарат которых развит А. Немировским и Ю. Нестеровым [25]. Они состоят в вычислении ньютоновского направления

$$p_k = -(\nabla^2 F_k(x_k))^{-1} \nabla F_k(x_k)$$

для специально сконструированных дважды дифференцируемых

¹ На текущем интервале $[a_k, b_k]$ выбираются две точки – кандидаты a_+ и b_+ , разбивающие отрезок в отношении золотого сечения:

$(b_k - a_k)/(b_+ - a_k) = (b_k - a_k)/(b_k - a_+) = \varphi = 1,618\dots$ В этих точках вычисляются значения функции $\Phi(a_+), \Phi(b_+)$. Если $\Phi(a_+) \leq \Phi(b_+)$, то минимум этой выпуклой функции не может находиться в интервале $(b_+, b_k]$, и его можно «отсечь»; тем самым каждый шаг уменьшает область локализации в φ раз. Ключевой особенностью метода является то, что одна из новых точек-кандидатов в полученном меньшем отрезке $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, b_+]$ совпадает с a_+ , и заново вычислять в ней функцию уже не требуется. Случай $f(a_+) > f(b_+)$ рассматривается аналогично.

² Если показатель геометрической прогрессии не слишком близок к 1.

³ Альтернативный подбор длины шага, основанный на правиле Армихо, описан далее в подразделе 3.2.

«самосопряжённых барьерных»¹ функций $F_k(\cdot)$, и выполнении шагов² метода Ньютона $x_{k+1} = x_k + \gamma_k p_k$. Этот метод также имеет линейную скорость сходимости $N(\varepsilon) = O(\ln \frac{1}{\varepsilon})$, при этом задача может быть структурно сложной, вида (1) с множеством разнообразных ограничений [24]. Барьерная функция инкапсулирует информацию и о целевой функции, и о свойствах множества ограничений \mathbb{X} , точнее, о его границах. В языках моделирования задач типа cvx матрица Гессе барьера $\nabla^2 F_k(\cdot)$ формируется автоматически из дерева построения целевой функции и ограничений.

3. Выбор метода оптимизации

Как обычно, для сложных задач не существует единого, универсального способа их решения, некой «серебряной пули». Задачи выпуклой оптимизации не исключение. В первую очередь выбор подходящего метода зависит от наличия ограничений и гладкости/негладкости³ целевой функции и границы множества \mathbb{X} . От этих факторов существенно зависит *сложность* задачи и класс «работающих» в данных условиях методов. Во-вторых, необходимо количественно «измерять» качество конкретного алгоритма.

С одной стороны, даже примитивный алгоритм может быстро работать для, казалось бы, сложной задачи (например, «прыгая» одним шагом из начальной точки x_0 в решение x^*). Однако такая оптимистичная оценка качества, как число шагов для достижения минимума⁴, резко меняется при смене начальных то-

¹ Например, для линейного ограничения $a^T x \leq b$ таким барьером может служить функция $-\ln(b - a^T x)$.

² Демпфированного, если $\gamma_k < 1$, и «полношагового», если $\gamma_k = 1$. Обычно под методом Ньютона понимают полношаговый метод.

³ Точнее, дифференцируемости/недифференцируемости целевой функции и/или единичного вектора нормали к опорной плоскости множества ограничений \mathbb{X} . Для удобства изложения будем говорить о гладкости.

⁴ Строго говоря, для гладкого случая почти никогда нельзя точно по-

чек и небольшом изменении целевой функции и/или ограничений.

Поэтому для оценки сложности (алгоритмов, методов) используется гарантированный подход: для заданной желаемой точности ε для конкретного метода можно говорить, за какое число шагов $N(\varepsilon)$ он *заведомо* достигнет эту точность, то есть иметь оценку

$$f(x_{N(\varepsilon)}) - f^* \leq \varepsilon.$$

И наоборот, для данного номера итерации N можно оценить качество полученного к этому моменту решения, то есть ограничить достигнутую невязку сверху, например, по функции:

$$\varepsilon(N) \geq f(x_N) - f^*.$$

Как правило, это делается в качественном виде, определяя порядок зависимости в терминах « O -большое» для числа итераций $N(\varepsilon) = O(\dots)$ и « o -маленькое» – для точности $\varepsilon(N) = o(\dots)$, см. следующий подраздел с конкретными оценками для разных методов. Сам тип зависимости определяется как характеристиками, устройством задачи, так и «качеством» метода. Для упрощения предполагается, что ε достаточно мало.

Помимо числа шагов, необходимо понимать и оценивать сложность одного шага (итерации), что зависит и от метода, и от особенностей задачи, в частности способа вычисления целевой функции и её градиента/матрицы Гессе.

Перечислим основные методы и их свойства. Для гладких функций иногда требуется градиент со свойством Липшица, нестрого говоря, ограниченность «скорости» градиента (ограниченность его приращения по отношению к изменению аргумента). Это условие выражается неравенством $\|\nabla f(x) - \nabla f(z)\| \leq L\|x - z\|$, где L называется константой Липшица. Напомним,

пасть в точку минимума, можно только приблизиться к нему. Удивительным образом точного попадания можно добиться для некоторого класса негладких (что обычно подразумевает «более сложных») задач [5, 12], см. подраздел 3.1.

что целевая функция предполагается выпуклой. Для более полной картины и сравнения методов см. сводную таблицу во введении работы [12].

3.1. ГРАДИЕНТНЫЕ И СУБГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Промежуточное место между методом минимизации на отрезке и методом Ньютона, использующим вторые производные, занимают *градиентные методы*. К сожалению, их эффективность (напомним – гарантированная эффективность) заметно ниже. Более того, они «хорошо работают» при отсутствии ограничений, то есть для задачи (2). Теоретические оценки впервые были получены в книге А.С. Немировского и Д.Б. Юдина [3].

У общеизвестного градиентного¹ метода

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)$$

скорость сходимости $N(\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon})$. При этом можно брать постоянный шаг, например $\gamma_k = \frac{1}{L}$, с константой Липшица градиента, либо использовать одномерную минимизацию или правило Армихо (7). В случае сильно выпуклой² целевой функции можно получить линейную скорость сходимости с постоянным шагом [4, 5].

Если выпуклая функция не всюду дифференцируема, то у неё существует субградиент $\partial f(x)$ со свойством³ $f(x+z) \geq f(x) + z^T \partial f(x)$. Аналогичный субградиентный метод $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \partial f(x_k)$ также сходится, но скорость значительно уменьшается: $N(\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ [8]. Это связано с тем, что

¹ Направление $p_k = -\nabla f(x_k)$ иногда называют *анти-градиентом*, перенося это название на сам метод.

² С «усиленным» неравенством $f(\alpha x + (1-\alpha)z) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z) - \mu \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \|x-z\|^2$, $\alpha \in [0, 1]$, здесь μ – константа сильной выпуклости.

³ Графически направление субградиента соответствует внешней нормали опорной плоскости к множеству Лебега (Sublevel Set) $\{y : f(y) \leq f(x)\}$, где точка x фиксирована; если граница множества Лебега (линия уровня, Contour Line) имеет «излом», направление определено неоднозначно. В точках, где функция дифференцируема, субградиент совпадает с градиентом.

для сходимости необходимо делать уменьшающиеся шаги, например $\gamma_k = \frac{\gamma_0}{k+1}$. Однако если известно минимальное значение¹ целевой функции f^* , можно применить специальный шаг $\gamma_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\|\partial f(x_k)\|^2}$, [5]. В этом случае может произойти² любопытный эффект: произойдёт точная сходимость к минимуму за конечное число шагов.

При наличии ограничений можно использовать метод проекции градиента: после каждого шага вдоль анти-градиента необходимо «вернуть» точку на допустимое множество, например, спроектировав³ её:

$$x_{k+1} = P_{\mathbb{X}}(x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)).$$

Однако при этом он резко теряет свою эффективность, сравниваясь с субградиентным методом безусловной минимизации: $N(\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$.

«Инерционные» методы.

В плохо обусловленных⁴ (Ill-Conditioned) задачах градиент-

¹ Это происходит не так редко, как может показаться. Например, решение системы неравенств $g_i(x) \leq 0$ приводит к эквивалентной задаче минимизации функции $f(x) = \max_i \{g_i(x), 0\}$, с $f^* = 0$ (если система разрешима) [5].

² Для этого необходимо [5], чтобы множество решений состояло из множества точек и имело непустую относительную внутренность (Relative Interior); это часто верно для примера с разрешимостью системы ограничений [12]. Во-вторых, необходимо делать чуть более длинный шаг $\gamma_k^+ = \frac{f(x_k) - f^* + \delta}{\|\partial f(x_k)\|^2}$.

³ Эта вспомогательная в контексте метода операция может быть нетривиальна сама по себе для конкретного допустимого множества \mathbb{X} . Это накладывает на \mathbb{X} неформальное ограничение «простоты», см. также подраздел 4.4.

⁴ Нестрого говоря, это соответствует большой «вытянутости» линий уровня функции, возможно из-за существенно разных масштабов или интервалов изменения компонент $x^{(i)}$. Функции с такими свойствами иногда называют «овражными». Для дважды дифференцируемых функций плохая обусловленность характеризуется большим числом обусловленности, равным отношению максимального и минимального собственных значений матрицы Гессе:

$$\kappa = \lambda_n(\nabla^2 f(x)) / \lambda_1(\nabla^2 f(x)) \gg 1.$$

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

ный метод с полной релаксацией, то есть с «наилучшей» длиной шага $\gamma^* = \arg \min_{\gamma} f(x_k - \gamma \nabla f(x_k))$, может сходиться весьма медленно. Это связано с тем, что градиент меняется очень быстро и может задавать совсем разные, даже почти противоположные направления.

Простой, но эффективный *метод тяжёлого шарика* (предложенный Б.Т. Поляком) отчасти решает эту проблему, «запоминающая» предыдущее направление $x_k - x_{k-1}$ и частично используя его [5]:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}), \quad \beta < 1.$$

Параметры метода α, β фиксированные. В течение итераций значение функции может временно возрастать. Вблизи минимума метод имеет квадратичную скорость сходимости.

Схожую по форме, но другую структуру по содержанию имеют «ускоренные» (Accelerated), «инерционные» (Momentum) методы. Самым известным является *быстрый градиентный метод* (Fast Gradient Descent) Ю. Нестерова, например, в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k), \\ y_{k+1} &= x_{k+1} + \beta_k(x_{k+1} - x_k), \end{aligned}$$

где $y_0 = x_0$, а значение β_k рассчитывается по известным параметрам¹ задачи. Данные методы являются «экстра-градиентными», то есть для шага они используют градиент, вычисленный не в текущей точке, а в некоторой *другой* точке. Иногда используются не две, а три последовательности точек [1].

Данные методы являются теоретически «наилучшими» в классе градиентных и имеют скорость сходимости $\varepsilon(N) = o(\frac{1}{N^2})$, $N(\varepsilon) = O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ [3, 4, 24]. Как и в методе тяжёлого шарика, значения целевой функции могут иногда возрастать. Сам метод чувствителен к используемым константам: если они неизвестны или оценены неправильно, метод может расходиться. Существует несколько разновидностей быстрых градиентных методов [4],

¹Конкретно для этого метода помимо константы Липшица L для длины шага используется константа сильной выпуклости μ [4] («спрятанная» в β_k).

включая вариант для задачи с ограничениями и адаптивным подбором констант. Хорошим введением и обзором с описанием развития градиентного подхода от классического до ускоренного служит работа [1].

Промежуточные методы.

Два следующих метода конкурируют за титул «наилучшего метода» в задачах без ограничений.

Метод сопряжённых градиентов (Conjugate Gradient Method) вычислительно почти так же прост, как быстрый градиентный метод, новое направление включает предыдущее:

$$\begin{aligned} p_k &= -\nabla f(x_k) + \beta_k p_{k-1}, \\ x_{k+1} &= x_k + \gamma_k p_k. \end{aligned}$$

Коэффициент β_k рассчитывается специальным образом, например по формуле Полака – Рибьера – Поляка [5]:

$$\beta_k = \frac{\nabla f(x_k)^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}.$$

Хотя формально метод может быть записан в виде (5) и его схема соответствует подходу «направление + шаг», подбор длины шага γ должен осуществляться одномерным поиском¹. Вблизи локального минимума дифференцируемой функции сходимость квадратичная. Изначально применяемый к задаче решения системы линейных уравнений², метод оказался удачным для минимизации гладких функций (2). Благодаря способности порождать релаксационную последовательность $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ он успешно применяется и для невыпуклой минимизации.

Немного другим способом ускоряет сходимость семейство квази-ньютоновских методов. В них не используется матрица вторых производных, как в методе Ньютона, но из анализа

¹ Не правилом Армихо (7)! Это принципиально для сохранения «сопряжённости» последовательных направлений.

² Её можно переформулировать как задачу оптимизации с квадратичной целевой функцией, для которой метод сопряжённых градиентов сходится за конечное число шагов, равное размерности переменной.

предыдущих градиентов собирается схожая информация. А именно, аппроксимируется обратная к матрице Гессе $(\nabla^2 f(\cdot))^{-1}$ матрица H_k . Шаги метода $x_{k+1} = x_k - \gamma H_k \nabla f(x_k)$. Начиная с единичной матрицы $H_0 = I$ на каждом шаге происходит обновление этой аппроксимации, например, способом Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шенно (BFGS):

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta_k^T v_k + v_k^T H_k v_k}{(\Delta_k^T v_k)^2} \Delta_k \Delta_k^T - \frac{H_k v_k \Delta_k^T + \Delta_k^T v_k^T H_k}{\Delta_k^T v_k},$$

где $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$, $v_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

При наивном подходе хранение квадратной матрицы в задачах большой размерности не представляется возможным, однако её можно использовать неявно, ограничиваясь конечной (небольшой) памятью, см. подраздел 4.3.

И в методе сопряжённых градиентов и в квази-ньютоновских методах «накопленное» направление p_k или матрицы H_k периодически «сбрасывается» на анти-градиент и единичную матрицу¹ соответственно. Такие обновления («рестарты») необходимы из-за проблемы накопления численных ошибок, приводящей к неустойчивости, а также необходимости «забывать» неактуальные значения градиента в «старых» точках, замедляющие сходимость.

Учёт ограничений, заданных в виде множества.

В методе внутренней точки ограничения учитываются «автоматически», барьерная функция не позволяет «выйти» из допустимого множества. В противном случае ограничения должны быть учтены явно.

Одним из способов получать точки x_k , удовлетворяющие ограничениям, является проектирование на множество, другим – упрощение решаемой задачи, исключаяющей целевую функцию и учитывающую только само ограничение (см. также подраздел 4.4).

Так, шаг метода с использованием градиента для задачи с ограничениями (1) может быть записан как шаг метода зер-

¹ Что тоже приводит к анти-градиентному шагу.

кального спуска (Mirror Descent)

$$(6) \quad x_{k+1} = \arg \min_{x \in X} \left(x^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{t_k} D(x_k, x) \right),$$

где $D(x, y)$ – функция, подобная расстоянию¹ (расхождение Брэгмана, Bregman divergence) [3, 10]. В случае когда эта функция – квадрат евклидовой нормы, метод (6) совпадает с методом проекции (суб-)градиента. Конечно, для успешной работы алгоритма необходимо уметь решать вспомогательную задачу, зависящую пусть и не от целевой функции, но от множества ограничений и функции Брэгмана. Если эта задача решается и если функция Брэгмана подобрана в соответствии с *геометрией* множества ограничений², то зависимость констант (участвующих в оценках скорости сходимости) от размерности может быть значительно уменьшена, например, с \sqrt{n} до $\sqrt{\log n}$. Хороший обзор методов, слабо зависящих от размерности, см. в [12].

Решение задачи (6) можно считать нелинейной проекцией на \mathbb{X} , так как оно всегда возвращает точку из множества ограничений. Быстрый градиентный метод может быть адаптирован для задач условной минимизации аналогичным способом [1].

3.2. ВЫБОР ДЛИНЫ ШАГА

В градиентном³ методе, квази-ньютоновских и ньютоновском методах в первую очередь выбирается допустимое⁴ направление p_k , а затем делается шаг длины γ_k . Существует простой и эффективный метод, позволяющий подбирать длину шага: *правило Армихо* (Armijo rule) в сочетании с *дроблением* (Backtracking). Начиная с достаточно большого шага $\gamma^{(0)}$ выпол-

¹ Она порождается дифференцируемой строго выпуклой функцией $d(x)$ как $D(x, y) = d(x) - d(y) - (x - y)^T \nabla d(x)$ и не является расстоянием в строгом смысле.

² Важнейшие из них – это симплекс и его аналог в классе положительно полуопределённых матриц: спектрэдры $\{X \succeq 0 : \text{tr} X = 1\}$.

³ Но не субградиентном методе, в котором принципы выбора шага довольно жёсткие.

⁴ То есть направление, в котором функция убывает: $f'_\gamma(x_k + \gamma p_k) = p_k^T \nabla f(x_k) < 0$.

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

няется дробление $\gamma^{(j)} = \gamma^{(0)}2^{-j}$, $j = 1, 2, \dots$, пока не будет выполнено условие

$$(7) \quad f(x_k + \gamma^{(0)}2^{-j}p_k) \leq f(x_k) + \alpha\gamma^{(0)}2^{-j}p_k^T \nabla f(x_k).$$

Параметр α выбирается из интервала $(0, 1)$, например 0,85, а дробление шага можно организовать с другим множителем, отличным от $1/2$. В результате получается слабо сходящаяся убывающая последовательность $f(x_k)$ (если функция ограничена снизу).

4. Специфика задач большой размерности

Как отмечалось выше, можно выделить несколько причин увеличения сложности решения задач при росте размерности. Первая – увеличение размерности переменной ($n \gg 1$), вторая – усложнение вычисления целевой функции (например, она представляется суммой большого числа простых функций невязок, как в методе наименьших квадратов), третья – увеличение числа ограничений или их усложнение.

С усложнением целевой функции хорошо справляются методы *распределённой оптимизации*. Увеличение же размерности переменных или числа ограничений схожи: если ограничения задаются функциями, то чаще всего их учитывают, составляя функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \nu^T (Ax - b),$$

минимизация¹ которой по исходной переменной x приводит к так называемой *двойственной функции* $d(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu)$ и *двойственной задаче* $q^* = \sup_{\lambda_i \geq 0, \nu} d(\lambda, \nu)$. Для выпуклой исходной («прямой») задачи решение двойственной задачи совпадает² с исходной ($q^* = f^*$, сильная двойственность) и косвенно

¹ При фиксированных λ, ν , которые являются параметрами для вспомогательной задачи.

² Опять же, если оно существует; дополнительно требуются условия регулярности. Например (условие Слейтера), достаточно, чтобы существовала «относительно внутренняя» точка ограничений x : $g_i(x) < 0, Ax = b$.

позволяет восстановить решение x^* по оптимальным значениям двойственных переменных $(\lambda^*, \nu^*) = \arg \sup_{\lambda_i \geq 0, \nu} d(\lambda, \nu)$. Для вычисления значений двойственной функции при фиксированных (λ, ν) необходимо решать вспомогательную задачу без ограничений. Отметим, что размерность аргументов функции Лагранжа объединяет размерности исходного вектора x и суммарное число ограничений, включающее как ограничения-неравенства, так и линейные ограничения-равенства.

Методы, решающие прямую задачу с помощью двойственной, часто называют двойственными методами. Решения исходной и двойственной задачи могут быть найдены одновременно, так как вместе они формируют седловую точку¹ функции Лагранжа:

$$L(x^*, \lambda, \nu) \leq L(x^*, \lambda^*, \nu^*) \leq L(x, \lambda^*, \nu^*), \quad \lambda \geq 0.$$

Методы нахождения седловых точек составляют отдельный класс (например *метод множителей с переменным направлением*, Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM, см. раздел 2.2). К задачам о седловой точке могут применяться как стохастические алгоритмы решения, так и аналоги методов безусловной минимизации. Они могут быть сформулированы как задачи о вариационном неравенстве, в гладком случае решаемые с точностью $O(\frac{1}{N})$ [22].

4.1. РАЗРЕЖЕННОСТЬ

Первой вычислительной проблемой при большой размерности является сложность проведения операций между матрицами и векторами, вспомогательных операций с матрицами (разложения) и даже просто хранение матриц. Так, для методов Ньютона и внутренней точки требуется не только хранить матрицу размерности $n \times n$ (симметричная матрица задаётся $n(n+1)/2$ элементами), но и решать систему уравнений большой размерности для нахождения ньютоновского направления: $\nabla^2 F(x_k) p_k = -\nabla F(x_k)$.

¹ В общем (выпуклом!) случае для задачи (1) правая часть неравенства должна быть выполнена для всех $x \in Q_j, j = 1, \dots, \ell$.

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

В случае когда данные и/или способ задания функций *разрежены*¹, хранение и вспомогательные вычисления заметно упрощаются. Так, для целевой функции $f(x)$, «почти сепарабельной» по компонентам $x^{(i)}$, матрица вторых производных $\nabla^2 F_k(x_k)$ разрежена и метод внутренней точки всё ещё применим.

В противном случае в распоряжении остаются только методы нулевого (то есть использующие только вычисляемые значения функций) или первого (использующие значения функций и их градиенты) порядков.

Разреженность можно ввести неявно, например, выделяя блоки переменных и выполняя шаги в (блочнo-)координатных направлениях [30]. Продуктивным оказывается и искусственное закругление направления, например, вычисляя градиент неточным, но простым способом, в том числе используя стохастический градиент [12].

4.2. ВЛИЯНИЕ КОНСТАНТ

Как правило, задачи большой размерности плохо обусловлены, поэтому полезно применять преобразования, масштабирующие данные, то есть выполнять *предобуславливание* (Pre-Conditioning). Данные преобразования должны быть простыми, например, соответствующими диагональной или мало-диагональной масштабирующей матрице. Подобные алгоритмы могут уменьшать локальное число обусловленности и часто используются как вспомогательный инструмент в методах внутренней точки [9].

В задачах со специальными ограничениями могут применяться специфические для данной задачи нормы и неевклидовы прокс-функции², ярким примером этого подхода является алгоритм зеркального спуска из подраздела 3.1.

Кроме того, помимо значения функции желательно эффективно вычислять и её градиент.

¹ То есть число ненулевых элементов невелико – кратно размерности n , а не её квадрату.

² Шаг метода зеркального спуска можно рассматривать как «оштрафованный» функцией $D(x_k, \cdot)$ градиентный шаг.

4.3. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Самыми простыми являются методы тяжёлого шарика и быстрый градиентный метод (или его варианты): они не требуют подбора длины шага, но нуждаются в правильно оценённых константах.

Метод сопряжённых градиентов и квази-ньютоновские методы также достаточно просты и используют вспомогательную одномерную минимизацию $\min_{\gamma} f(x_k + \gamma p_k)$ вдоль найденного направления p_k на каждом шаге.

Использование матриц в квази-ньютоновских методах можно избежать. В популярном квази-ньютоновском методе L-BFGS (BFGS с короткой памятью) аппроксимация матрицы $H_k \approx \nabla^2 f(x_k)^{-1}$ не только не хранится, но и не «накапливается» итеративно. Вместо этого она хранится в виде обновляемого набора небольшого числа (J) векторов q_j . Будучи суммой одноранговых матриц $H_k = \sum_{j=k-J+1}^k q_j q_j^T$, она не формируется в памяти, а используется исключительно для вычисления приближённого направления $p_k = H_k \nabla f(x_k) = \sum_{j=k-J+1}^k (q_j^T \nabla f(x_k))$ как взвешенной суммы J векторов.

4.4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Как уже говорилось, основная сложность задачи большой размерности вызвана именно размерностью переменной x . При этом ограничения могут быть весьма просты: интервальные ограничения $x^{(i)} \in [\underline{x}^{(i)}, \bar{x}^{(i)}]$, симплексы $\sum_i x^{(i)} = 1$, $x^{(i)} \geq 0$ и $\sum_i x^{(i)} \leq 1$, $x^{(i)} \geq 0$, шары в различных нормах $\{x : \|x\| \leq r\}$ и т.п. Такие задачи иногда называются задачами с «простым» множеством ограничений: $\min_{x \in Q} f(x)$ [5]. Их простота понимается в том смысле, что для этих множеств можно эффективно¹ решать вспомогательные задачи, например, нахождение проекции (см. метод проекции (суб-)градиента) или поиск «крайней» в

¹ В контексте задач большой размерности число элементарных операций должно быть порядка $O(n)$, $O(n \log n)$, то есть слабо зависеть от размерности; либо задача разрешима аналитически.

направлении s точки:

$$y = \arg \max_{x \in Q} x^T c.$$

Идея метода Франк – Вульфа (условного градиента) состоит в следующем: в качестве направления s берется анти-градиент, и для текущей точки x_k вычисляется $y_{k+1} = \arg \min_{y \in Q} y^T \nabla f(x_k)$; затем выбирается направление (точнее отрезок) между x_k и y_{k+1} , и на нём решается задача выпуклой одномерной оптимизации $x_{k+1} = x_k + \gamma^*(y_{k+1} - x_k)$, $\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in [0,1]} f(\gamma y_{k+1} + (1 - \gamma)x_k)$.

Во время как градиентные методы могут выводить за пределы множества ограничений Q и из-за проекции обратно теряют эффективность, метод Франк – Вульфа находит точки внутри этого множества.

4.5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Задача линейного программирования.

Если в задаче линейного программирования (3) число ограничений невелико, высокую эффективность показывает стандартный симплекс-метод. Косвенно это следует из-за того, что для задачи линейного программирования в стандартной форме $\min_{\bar{A}\bar{x}=\bar{b}, \bar{x} \geq 0} \bar{c}^T \bar{x}$ внутренние вспомогательные таблицы имеют число элементов, по порядку сравнимое с произведением размерности x и числа ограничений. Хотя существуют контр-примеры (Кли, Минти), «в среднем» симплекс-метод работает очень хорошо.

Если же наоборот, количество ограничений велико, существует метод прямо-двойственной генерации столбцов (Primal-Dual Column Generation Method, PDCGM), связанный с последовательным решением упрощённых задач [19]. Во вспомогательных задачах используется метод внутренней¹ точки. Идея состо-

¹ Изначально методы внутренней точки появились именно для решения задач линейного программирования. Напомним, общая выпуклая задача нелинейного программирования (1) может быть аппроксимирована линейной задачей (3), [20].

ит в том, чтобы для двойственной задачи адаптивно учитывать не все ограничения.

Задача квадратичного программирования.

Метод внутренней точки для квадратичного программирования может быть записан как прямо-двойственный метод высокого порядка (Higher Order Primal-Dual Method, HOPDM) [20]. Алгоритм использует эффективные матричные (частичные) разложения для решения вспомогательных подзадач, поэтому применим и к задачам большой размерности. Также есть возможность применения «безматричного» варианта метода внутренней точки [18], помимо предобуславливания использующего ограниченную память, аналогично методу L-BFGS.

Задача полуопределённого программирования.

Задача полуопределённого программирования (4) является частным случаем задачи программирования на конусах (Cone Programming). Эти задачи часто решаются методом внутренней точки. Ключевым элементом метода внутренней точки является решение системы линейных уравнений, использование разреженности (или иных особенностей) которой может быть подстроено по конкретную задачу. Пакет CVXOPT был разработан с целью создания специфичных решателей, настроенных на те или иные семейства задач [9, 14].

При высокой размерности задача может быть решена в разреженных или некоторых специальных постановках [32]; помимо метода внутренней точки, существует и альтернативный, субградиентный подход [29].

5. Программные пакеты

Для решения прикладных задач в первую очередь следует сформулировать задачу математически и определить, к какому классу она относится и какими свойствами обладает: выпуклость, дифференцируемость, наличие и тип ограничений, разреженность и пр. Далее необходимо выбрать средство решения этой задачи. Отличным помощником в выборе подходящих численных методов или программных средств является сайт «Дерево

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

принятия решений по программам оптимизации» (Decision Tree for Optimization Software) [16]. Коллекция решателей и вспомогательных программ с открытым исходным кодом собрана на сайте «Вычислительная инфраструктура для исследования операций» (Computational Infrastructure for Operations Research, COIN-OR) [13].

Можно попробовать решить задачу онлайн с помощью сервера NEOS [23], предварительно смоделировав её на подходящем языке моделирования: AMPL, GAMS, MPS и др. Данный сервис позволяет сравнить различные решатели, в том числе коммерческие.

Для решения выпуклых задач общего вида удобно использовать языки моделирования высокого уровня, встраиваемые в языки программирования: YALMIP (Matlab) [33], cvx (Matlab, Python) [17, 21] и OPTI (Matlab, Windows) [27]. Все они представляют удобный интерфейс к множеству специализированных решателей, включающему как некоммерческие (SDPT3, SEDUMI, OSQP, CVXOPT и т.д.), так и коммерческие (CPLEX, GUROBI, MOSEK, BARON и пр.). Последние позволяют решать некоторые невыпуклые задачи оптимизации.

Повторно отметим пакет с открытым исходным кодом CVXOPT (Python), позволяющий строить свои варианты метода внутренней точки [9, 14].

6. Заключение

При решении задачи большой размерности необходимо понимать, к какому типу она относится и какие методы можно применять, поскольку универсального метода не существует. Для задач без ограничений традиционными (и эффективными) являются методы сопряжённых градиентов и L-BFGS, наряду с методами тяжёлого шарика и быстрыми градиентными методами.

В разреженных задачах с ограничениями и в задачах линейного программирования удаётся применять специальные варианты метода внутренней точки, а для задач полуопределённого программирования существует аналог быстрого градиентного мето-

да. Методы условного градиента и зеркального спуска применимы для задачи с «простыми» ограничениями.

Немаловажен и выбор языка моделирования задачи и подбор (иногда – перебор) подходящего решателя. В предыдущем подразделе выполнен обзор необходимого «инструментария» в виде программных пакетов и ссылок на обзорные сайты.

Литература

1. ГАСНИКОВ А.В. *Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска.* – М.: Изд-во МФТИ, 2018. – 181 с.
2. ДЕННИС ДЖ. МЛ., ШНАБЕЛЬ Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений.* – М.: Мир, 1988. – 440 с.
3. НЕМИРОВСКИЙ А.С., ЮДИН Д.Б. *Сложность задач и эффективность методов оптимизации.* – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию.* – М.: МЦНМО, 2010. – 280 с.
5. ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: Ленанд, 2014. – 392 с.
6. ПОЛЯК Б.Т., РАПОПОРТ Л.Б., ХЛЕБНИКОВ М.В. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие.* – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
7. ФЕДОРОВ Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 488 с.
8. ШОР Н.З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.* – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
9. ANDERSEN M.S., DAHL J., LIU Z., VANDENBERGHE L. *Interior-Point Methods for Large-Scale Cone Programming // In: Optimization for Machine Learning / Sra S., Nowozin S., Wright S.J. (eds.). – MIT Press, 2012. – P. 55–83.*

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

10. BECK A., TEBOULLE M. *Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization* // Operations Research Letters. – 2003. – Vol. 31, No. 3. – P. 167–175.
11. BOYD S., VANDENBERGHE L. *Convex Optimization*. – Cambridge University Press, 2004. – 716 с. – URL: http://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf (дата обращения: 17.03.2019).
12. BUBECK S. *Convex Optimization: Algorithms and Complexity* // Foundations and Trends in Machine Learning. – 2015. – Vol. 8, No. 3–4. – P. 231–357.
13. *Computational Infrastructure for Operations Research website*. – URL: <https://www.coin-or.org/projects> (дата обращения: 17.03.2019).
14. *CVXOPT: Python Software for Convex Optimization*. – Ver. 1.2. – URL: <https://cvxopt.org> (дата обращения: 17.03.2019).
15. *CVXPY web site*. – URL: <https://www.cvxpy.org> (дата обращения: 17.03.2019).
16. *Decision Tree for Optimization Software*. – URL: <http://plato.asu.edu/guide> (дата обращения: 17.03.2019).
17. DIAMOND S., BOYD S. *CVXPY: A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization* // J. of Machine Learning Research. – 2016. – Vol. 17, No. 83. – P. 1–5.
18. GONDZIO J. *Matrix-Free Interior Point Method* // Computational Optimization and Applications. – 2012. – Vol. 51, No. 2. – P. 457–480.
19. GONDZIO J., GONZÁLEZ-BREVIS P., MUNARI P. *Large-Scale Optimization with the Primal-Dual Column Generation Method* // Mathematical Programming Computation. – 2016. – Vol. 8, No. 1. – P. 47–82.
20. GONDZIO J. *Interior Point Methods 25 Years Later* // European J. of Operational Research. – 2012. – Vol. 218, No. 3. – P. 587–601.

21. GRANT M., BOYD S. *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming*. Ver. 2.1. – 2014. – URL: <http://cvxr.com/cvx> (дата обращения: 17.03.2019).
22. NEMIROVSKI A. *Prox-Method with Rate of Convergence $o(1/t)$ for Variational Inequalities with Lipschitz Continuous Monotone Operators and Smooth Convex-Concave Saddle Point Problems* // SIAM J. on Optimization. – 2004. – Vol. 15, No. 1. – P. 229–251.
23. *NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization*. – URL: <https://neos-server.org/neos/> (дата обращения: 17.03.2019).
24. NESTEROV YU. *Lectures on Convex Optimization*. – Springer Optimization and Its Applications, Vol. 137. Springer, 2018. – 589 с.
25. NESTEROV YU., NEMIROVSKII A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. – SIAM, 1995. – 405 с.
26. NOCEDAL J., WRIGHT S. *Numerical Optimization*. – Springer, 2006. – 664 с.
27. *OPTI Toolbox: A free MATLAB Toolbox for Optimization*. – URL: <https://inverseproblem.co.nz/OPTI/> (дата обращения: 17.03.2019).
28. POLYAK B.T., SHCHERBAKOV P.S. *Optimisation and Asymptotic Stability* // Int. J. of Control. – 2018. – Vol. 91, No. 11. – P. 2404–2410.
29. RENEGAR J. *Efficient First-Order Methods for Linear Programming and Semidefinite Programming*. – URL: <https://arxiv.org/abs/1409.5832> (дата обращения: 17.03.2019).
30. RICHTÁRIK P., TAKÁČ M. *Parallel Coordinate Descent Methods for Big Data Optimization* // Mathematical Programming – 2016. – Vol. 156, No. 1–2. – P. 433–484.
31. TEMPO R., CALAFIORE G., DABBENE F. *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems*. – Springer-Verlag, London, 2012. – 357 с.

2.1. Оптимизация в задачах большой размерности

32. TU S., WANG J. *Practical First Order Methods for Large Scale Semidefinite Programming*. – URL: <https://people.eecs.berkeley.edu/~stephentu/writeups/first-order-sdp.pdf> (дата обращения: 17.03.2019).
33. *YALMIP website*. – URL: <https://yalmip.github.io> (дата обращения: 17.03.2019).

2.2. РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Губко М.В.¹

1. Введение

В разделе описываются современные методы распределенной безусловной и условной выпуклой оптимизации, устанавливаются связи со смежными областями, формулируются принципы реализации распределенных алгоритмов.

2. Проблема распределенного принятия решений

Большинство задач управления сводятся к решению той или иной задачи оптимизации (введению в методы и алгоритмы оптимизации посвящен раздел 2.1). В современном мире приходится управлять *большими системами*, задачи управления и оптимизации в которых имеют высокую размерность. Однако основную проблему представляет не большая размерность сама по себе (см. соответствующие методы в разделе 2.1), а *распределенность объекта управления*, требующая учета ограничений на скорость и объемы передачи информации в системе управления (см. раздел 3.3) и приводящая к необходимости выполнять вычисления (в частности, решать задачи оптимизации) *распределенно*, то есть не собирая всю необходимую информацию в одном месте.

С появлением в конце XX века *киберфизических систем*, объединяющих в себе сложный распределенный объект управления, сенсорную сеть, цифровые каналы связи и компьютерную систему управления, сама возможность распределенных вычислений не вызывает сомнений, ведь почти в каждом узле такой системы, включая датчики и исполнительные устройства, имеется более или менее производительный микропроцессор.

Однако первые исследования еще в 50-е годы XX века проводились социологами, изучавшими достижение консенсуса – общего мнения – в группе индивидуумов [16, 17, 19] и экономи-

¹ Михаил Владимирович Губко, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.ф.-м.н. (mgoubko@mail.ru).

стами, разрабатывающими процедуры децентрализованной обработки информации в организациях [35] и распределенного принятия рациональных коллективных решений в рамках *теории команд* [24, 25, 32].

Вопрос о достижимости глобальной цели системы при ограниченной коммуникации (координации) между ее частями тесно примыкает к проблематике *управления многоагентными системами* (см. раздел 3.2) и *сетевое управление* (раздел 3.3).

В диссертации [33] и статьях [11, 34] были заложены основы современного подхода к задачам распределенной оптимизации, основанного на *децентрализации каналов связи*, усреднении локальных оценок, *распределенных и асинхронных* вычислениях для обеспечения устойчивости к обрывам коммуникаций. Однако по-настоящему востребованными эти результаты стали лишь в последние десятилетия, поддержанные, с одной стороны, существенным прогрессом в теории (выпуклой) оптимизации, а с другой стороны – развитием цифровых систем управления, Интернета вещей, распределенных баз данных и векторных параллельных вычислений.

2. Задача распределенной оптимизации

Рассмотрим систему, *состояние* которой описывается вектором $x \in \mathbb{R}^n$, а *целевая функция* $F(x)$ вогнута и достигает максимума в точке $r \in \mathbb{R}^n$. В этом случае выбор оптимального (то есть максимизирующего функцию $F(x)$ или, что эквивалентно, минимизирующую $-F(x)$) состояния x^* сводится к задаче выпуклой оптимизации (см. раздел 2.1) и, очевидно, $x^* = r$.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим задачу *управления режимом* электроэнергетической системы. Электростанция состоит из n генерирующих блоков, себестоимость генерации i -го блока описывается выпуклой функцией $c_i(x_i)$, где x_i – активная мощность, выдаваемая i -м блоком. Цена электроэнергии $p(g)$ убывает с ростом мощности суммарной генерации $g = \sum_{i=1}^n x_i$. Целевая функция системы – ее прибыль $F(x) = p(g)g - \sum_{i=1}^n c_i(x_i)$. Если функция дохода $p(g) \cdot g$ вогнута, то и целевая функция $F(x)$ вогнута. Точка r , где она достигает максимума, определяет *оптимальный режим*. •

Распределенная система состоит из n элементов, каждый из которых выбирает свою *компоненту* состояния системы, то есть число $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$. Если каждый элемент системы знает целевую функцию $F(x)$ системы в целом, то он может самостоятельно вычислить оптимальное состояние системы $x^* = r$ и выбрать свою компоненту состояния $x_i = r_i$.

Пример 2. Электроэнергетическая система из примера 1 становится распределенной, если генераторы относятся к разным электростанциям и могут управлять своей мощностью независимо. Чтобы выбрать оптимальную мощность генерации x_i , i -й генератор должен вычислить оптимальный режим r (см. пример 1), для чего он должен знать функции себестоимости $c_j(\cdot)$ всех генераторов $j = 1, \dots, n$, а также функцию дохода $p(g)g$.

При этом в n раз возрастает объем вычислений. В целях экономии один выделенный элемент (например, элемент с номером n), так называемый *Центр*, может решить централизованную задачу – вычислить оптимальное состояние x^* и сообщить остальным элементам необходимые им компоненты решения x_i^* , $i = 1, \dots, n - 1$.

Однако *передача информации* между элементами распределенной системы требует временных и финансовых затрат, сравнимых с затратами на решение задачи выбора оптимального состояния x^* , и в зависимости от требований прикладной задачи необходимы алгоритмы, обеспечивающие тот или иной рациональный баланс *вычислительных* и *коммуникационных затрат*.

3. Базовый алгоритм распределенной оптимизации

Часто целевая функция сложной распределенной системы складывается из целевых функций ее элементов:

$$(1) \quad F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x),$$

где вогнутая целевая функция $F_i(x)$, ассоциированная с i -м элементом, известна только самому элементу и достигает максимума в точке $r^{(i)} \in \mathbb{R}^n$.

Пример 3. Целевую функцию электроэнергетической системы в примере 2 можно записать в виде суммы целевых функций электростанций $F_i(x) = p(x_1 + \dots + x_n)x_i - c_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Себестоимость генерации $c_i(x_i)$ определяется состоянием генерирующего оборудования (в конечном счете – показаниями установленных на i -й станции датчиков), ценой и качеством топлива, другими внутренними факторами и не известна точно другим станциям. В силу убывания функции $p(\cdot)$ целевая функция i -й станции достигает максимума при нулевой генерации остальных станций, то есть взгляды $r^{(i)}$ элементов системы $i = 1, \dots, n$ на оптимальный режим сильно отличаются. •

Целевая функция $F(x)$ вогнута и достигает максимума в точке x^* , принадлежащей выпуклой оболочке $\text{Conv}\{r^{(1)}, \dots, r^{(n)}\}$ точек максимума целевых функций элементов. В частности, для *квадратичных функций* $F_i(x) = -\|x - r^{(i)}\|^2$, где $\|\dots\|$ – евклидова норма, оптимальное состояние системы равно среднему арифметическому точек максимума целевых функций элементов: $x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r^{(j)}$, и для выбора оптимального состояния системы x^* достаточно чтобы каждый элемент системы вычислил и сообщил Центру точку максимума $r^{(i)}$ своей целевой функции, взамен получив от него оптимальный компромиссный выбор $x_i^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_i^{(j)}$.

Если целевые функции элементов отличны от квадратичных, усреднение \bar{x} может уже не давать оптимального состояния системы, однако легко проверить, что если $F_j(x)$ – выпуклая функция, то при достаточно малом коэффициенте $\mu > 0$ точка максимума суммы

$$(2) \quad F_j(x) - \frac{\mu}{2} \|x - \bar{x}\|^2$$

лежит ближе к точке максимума функции $F(x)$, чем точка $r^{(j)}$.

В простейшем алгоритме распределенной оптимизации (назовем его *Базовым*) каждый элемент системы $j = 1, \dots, n$:

1. Получает из Центра начальное приближение решения \bar{x} .
2. Находит точку максимума $x^{(j)}$ функции (2) и передает ее в Центр.
3. Получает в ответ новое приближение \bar{x} , которое Центр

вычисляет, усредняя полученные точки максимума, если только не выполняется условие остановки алгоритма (например, если изменение \bar{x} недостаточно мало),

4. Возвращается на шаг 2.

Для функций $F_i(x) = -\|x - r^{(i)}\|^2$ Базовый алгоритм сходится всего за две итерации, поскольку уже после первой итерации $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r^{(j)}$ совпадает с оптимальным состоянием системы x^* , а получаемые на шаге 2 второй итерации точки максимума лишь пропорционально сдвигаются в сторону компромиссной точки x^* , так что их среднее \bar{x} остается неизменным. Нахождение оптимального состояния потребовало передачи $4n(n-1)$ чисел в $4(n-1)$ пакетах (или односторонних сеансах связи).

Классические алгоритмы оптимизации имеют другую структуру. Так, в *градиентном методе* (см. раздел 2.1) на каждой итерации решение $x(t)$ сдвигается в направлении наибоыстрейшего роста целевой функции, в случае гладких функций определяемом градиентом $\nabla F(x(t))$. Поскольку градиент $\nabla F_i(x(t))$ по условию известен только i -му элементу, для вычисления $\nabla F(x(t))$ Центр должен передать каждому из оставшихся $(n-1)$ элементов n -мерный вектор $x(t)$ и получить от них в ответ n -мерные вектора $\nabla F_i(x(t))$, $i = 1, \dots, n-1$.

Сходимость градиентного метода может потребовать большого числа итераций и соответствующего числа пакетов (не менее $2(n-1)$ пакетов на итерацию). Если при этом на втором шаге Базового алгоритма используется тот же градиентный метод, число арифметических операций в обоих алгоритмах одинаково.

Слабым местом Базового алгоритма является выделенная роль Центра и высокая коммуникационная нагрузка на него. Поэтому при разработке алгоритмов распределенной оптимизации стараются децентрализовать информационные потоки, направляя их по дугам некоторого *графа коммуникаций* $G = \langle N, E \rangle$. В Базовом алгоритме G имеет *верную структуру*, дуги которой связывают Центр и элементы. В общем случае G – направленный граф с *сетевой*, неиерархической структурой, позволяющей продолжать вычисления при обрыве соединений и даже выбытии отдельных элементов.

В сетевом варианте Базового алгоритма на втором шаге j -й элемент системы передает точку максимума $x^{(j)}$ функции (2) не в Центр, а множеству своих *слушателей* $OUT_j = \{i: ji \in E\}$, а на шаге 3 обновляет приближение \bar{x} , усредняя $x^{(j)}$ с оценками, полученными по входящим дугам множества $IN_j = \{i: ij \in E\}$.

Пример 4. При сложной сетевой структуре коммуникаций Базовый алгоритм не сходится за две итерации даже для квадратичных функций. В то же время интересно, что в этом случае динамика точек максимума $x^{(j)}$, $j \in N$, совпадает с *динамикой мнений* Френча – Де Гроота [16, 17] в задаче о *консенсусе* (см. раздел 3.2).

Эта задача, иначе называемая *проблемой распределенного усреднения*, состоит в нахождении *консенсуса* (компромиссного состояния $x^* \in \mathbb{R}^n$, относительно которого j -й элемент распределенной системы имеет априорное *мнение* $r^{(j)} \in \mathbb{R}^n$) в условиях заданного графа коммуникаций. С одной стороны, простейшая модель консенсуса (для которой и был предложен алгоритм Де Гроота) является частным случаем распределенной оптимизации квадратичных целевых функций. С другой стороны, в подразделе 5 ниже показывается, как общую модель распределенной оптимизации можно свести к задаче достижения некоторого консенсуса. •

В следующем подразделе описываются распределенные аналоги популярных алгоритмов безусловной оптимизации: субградиентного метода, метода «тяжелого шарика», метода Ю. Нестерова [5] и метода сопряженных градиентов [7].

4. Безусловная распределенная оптимизация

Распределенный субградиентный метод [27] позволяет находить максимум (в общем случае негладкой) функции (1) для меняющейся во времени сети коммуникаций. Это фактически сетевой Базовый алгоритм, где на шаге 2 производится единственная итерация субградиентного улучшения, а граф коммуникаций динамически меняется.

Для $t = 1, 2, \dots$ и всех $i, j = 1, \dots, n$ зададим такие веса $w_{ij}(t)$, что $w_{ii}(t) > 0$, $\sum_i w_{ij}(t) = 1$, и определим $IN_j(t) := \{i \neq j: w_{ij} > 0\}$. На итерации t алгоритма каждый элемент $j = 1, \dots, n$:

1. Получает текущие оценки $x^{(i)}(t)$ оптимального состояния от соседей $i \in IN_j(t)$,

2. Вычисляет взвешенную линейную комбинацию

$$(3) \quad \bar{x}^{(j)}(t+1) := \sum_{i=1}^n w_{ij}(t)x^{(i)}(t),$$

3. Улучшает свою оценку оптимального состояния

$$(4) \quad x^{(j)}(t+1) := \bar{x}^{(j)}(t+1) + \mu_j(t)d^{(j)}(t),$$

где вектор $d^{(j)}(t) \in \partial F_j(x^{(i)}(t))$ – субградиент, а $\mu_j(t)$ – размер шага (в общем случае зависящий и от элемента, и от номера итерации).

В варианте алгоритма с *предусреднением* субградиент вычисляется не в точке $x^{(i)}(t)$, а в точке $\bar{x}^{(j)}(t+1)$. Начальные оценки могут выбираться, например, как $x^{(i)}(1) = r^{(i)}$.

Распределенные аналоги *ускоренных субградиентных методов* (см. раздел 2.1) строятся заменой выражения (4) на

$$(5) \quad x^{(j)}(t+1) := \bar{x}^{(j)}(t+1) + \mu_j(t)d^{(j)}(t) - \\ - \mu_j(t)\beta_j(t)d^{(j)}(t-1) + \nu_j(t)[\bar{x}^{(j)}(t+1) - \bar{x}^{(j)}(t)].$$

Так, при $\beta_j(t) = 0$, $\nu_j(t) = \nu_j$ получаем *метод «тяжелого шарика»*, при $\beta_j(t) = 0$, $\nu_j(t) = \frac{t-1}{t+2}$ – *метод Ю. Нестерова* [5], а если $\nu_j(t) = 0$ и $\beta_j(t)$ вычисляется по формуле Полака – Рибьера – Поляка (см. раздел 2.1) – простейший вариант *метода сопряженных градиентов*.

При выполнении разумных требований [34] относительно коммуникационного графа и весов $w_{ij}(t)$ перечисленные методы первого порядка сходятся к некоторой точке в окрестности оптимума. Например, в [27] показано, что если:

– некоторые элементы системы связываются не реже чем раз в $B > 0$ итераций, причем из таких часто возникающих связей можно составить сильно связный граф;

– все связи обоюдны, а веса – симметричны и ограничены снизу: если $w_{ij}(t) > 0$, то $w_{ij}(t) = w_{ji}(t) > \eta > 0$;

– все субградиенты F_j , $j = 1, \dots, n$, ограничены по норме константой L (это условие можно ослабить, см. [27]); то алгоритм с общим постоянным шагом $\mu_j(t) = \mu$ сходится (по состоянию) с точностью $\varepsilon \sim \mu L$, а ошибка нахождения оптимума целевой функции имеет порядок μL^2 .

Чтобы алгоритм сходился к оптимальному состоянию x^* , необходимо усреднение не только текущего состояния, но и градиента. В методах типа DEXTRA [37] и DIGing [29], предназначенных для оптимизации гладких функций, алгоритм дополняется шагом 4, где усредняется и обновляется оценка градиента

$$(6) \quad d^{(j)}(t+1) = \sum_{i=1}^n w_{ij}(t) d^{(j)}(t) + \nabla F(x^{(j)}(t+1)) - \nabla F(x^{(j)}(t)).$$

Понятно, что для этого необходимо чтобы элемент получал от своих соседей не только информацию о текущем приближении $x^{(i)}(t)$, но и о градиенте $\nabla F_i(x^{(i)}(t))$.

Каждый элемент распределенной системы выбирает свою компоненту состояния, и на итерации t состояние системы $x(t) = (x_1^{(1)}(t), \dots, x_n^{(n)}(t))$, поэтому эффективность решения задач распределенного управления определяется близостью состояния системы и значения целевой функции к оптимальному состоянию и оптимальному значению целевой функции на последней итерации алгоритма.

Пример 5. Сравним сходимость рассмотренных централизованных и распределенных методов в задаче об оптимальном режиме электроэнергетической системы из примера 3. Пусть число электростанций $n = 10$, а их функции себестоимости описываются квадратичными функциями $c_i(x_i) = \frac{x_i^2}{2r_i}$, причем станции упорядочены по убыванию параметра r_i – эффективности генерации – от $r_1 = 0,73$ до $r_n = 0,01$, а цена задается функцией $p(g) = 2A - g$. Константа A имеет смысл емкости рынка,

при отклонении генерации от которой выручка $p(g)g$ системы убывает и даже становится отрицательной при $|g/A - 1| > 0$.

Градиент функции $F(x)$ ограничен по Липшицу с константой $L \sim (4n^2 + 4n \sum 1/r_i + \sum 1/r_i^2)^{0,5}$, поэтому для сходимости централизованных методов первого порядка (см. раздел 2.1) положим параметр шага $\mu = 1/L \sim 0,01$. Все методы стартуют из начальной точки $x(1) = (r_1, \dots, r_n)$. Параметр v_j метода «тяжелого шарика» выберем равным 0,7 для наилучшей сходимости.

В этом примере среди централизованных алгоритмов самую быструю сходимость демонстрирует метод «тяжелого шарика», затем идут методы Ю. Нестерова и сопряженных градиентов (см. рис. 2.2.1). Целевые функции в этой задаче гладкие, поэтому сходимость ускоренных методов ожидаемо оказалась существенно лучшей, чем у градиентного метода.

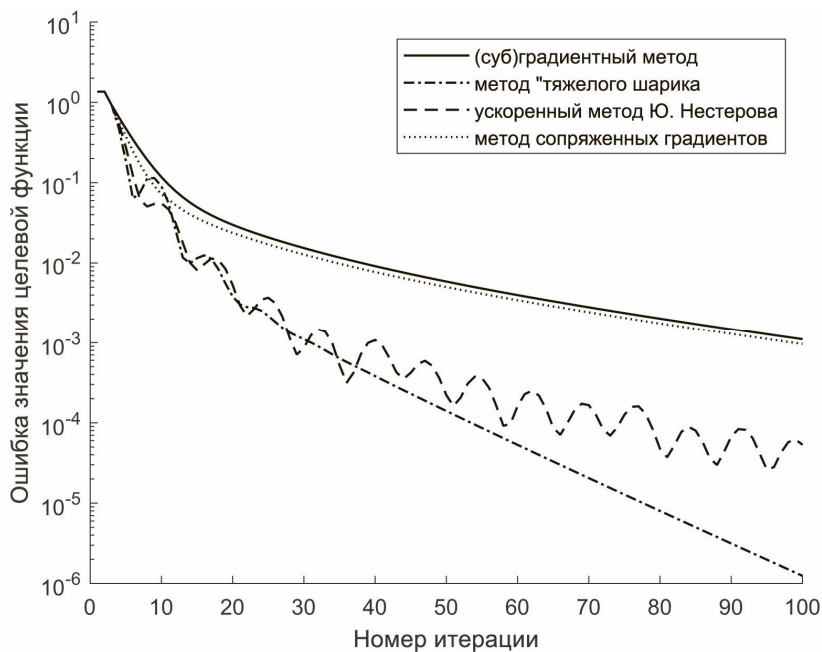


Рис. 2.2.1. Ошибка значения целевой функции в централизованных методах безусловной оптимизации (логарифмическая шкала)

На рис. 2.2.2 показана динамика состояний самой эффективной ($r_1 = 0,73$) и одной из малоэффективных ($r_{n-1} = 0,1$) станций. Хорошо видна характерная немонотонность динамики метода Ю. Нестерова и худшая сходимость по состоянию простого градиентного метода.

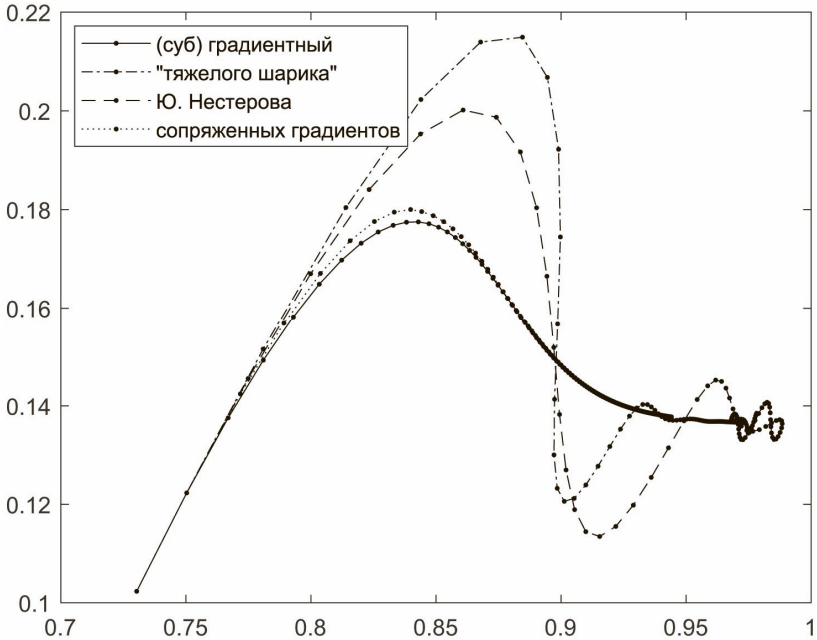


Рис. 2.2.2. Траектории первых ста итераций централизованных методов безусловной оптимизации в координатах (x_1, x_{n-1})

В распределенных методах начальные состояния элементов могут зависеть только от доступной им информации, поэтому начальные оценки состояния системы полагаются равными $x_j^{(i)}(1) = r_j$, $i, j = 1, \dots, n$, то есть каждый элемент считает, что остальные элементы системы имеют те же параметры функции себестоимости генерации, что и он сам.

Статический граф коммуникаций имеет вид кольца $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow n \leftrightarrow 1$ с весами всех связей равными $1/3$. Сравним распределенные варианты градиентного метода, методов «тяже-

лого шарика», Ю. Нестерова и сопряженных градиентов. Во всех методах градиент усредняется по формуле (6). Значения остальных параметров методов те же, что и в их централизованных реализациях выше.

На рис. 2.2.3 показано как меняется расстояние до оптимума в ходе работы распределенных алгоритмов. Для сравнения показана скорость сходимости лучшего централизованного метода («тяжелого шарика»).

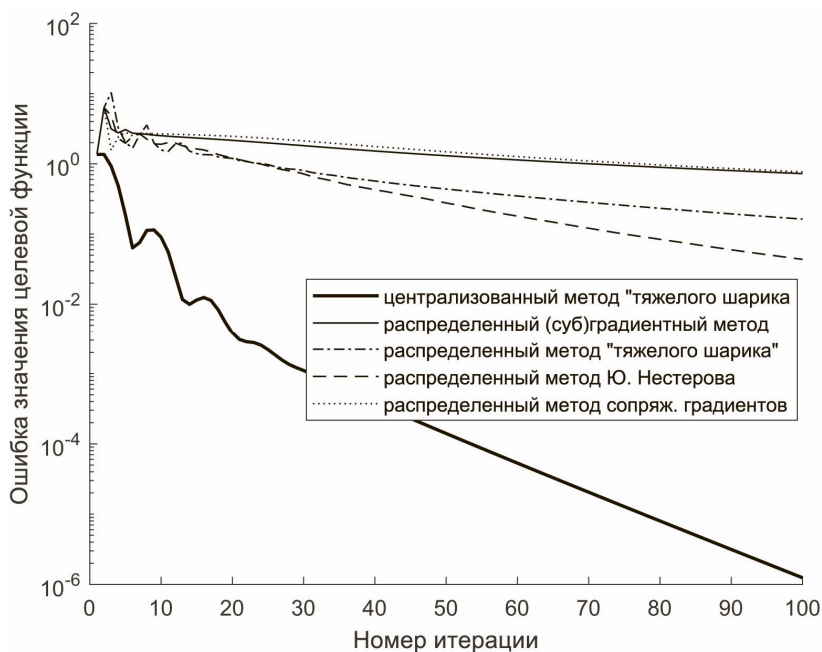


Рис. 2.2.3. Ошибка значения целевой функции в распределенных методах безусловной оптимизации (логарифмическая шкала)

На первых итерациях динамика распределенных алгоритмов определяется установлением (в каком-то приближении) консенсуса относительно текущей оценки состояния системы. Направление динамики ошибки целевой функции на этих итерациях определяется тем, насколько удачно выбраны начальные оценки. В нашем случае на первых итерациях ошибка растет,

затем начинает сокращаться. Самую быструю сходимость демонстрирует распределенный метод Ю. Нестерова, однако в данном примере сходимость распределенных методов оказывается существенно худшей чем у их централизованных аналогов, притом при больших коммуникационных затратах (количестве сеансов связи и объему передаваемой информации).

Несомненным преимуществом распределенных методов, однако, является их работоспособность в условиях различной топологии сети коммуникаций между элементами системы. •

5. Условная распределенная оптимизация

Введение дополнительных ограничений типа $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ в задаче максимизации выпуклой функции (1) не представляет трудностей, если множество X выпукло и известно всем элементам системы. Так, в Базовом алгоритме достаточно на шаге 2 решать задачу условной оптимизации функции (2) на множестве $x \in X$ с помощью *метода проекции градиента* или другого метода *условной оптимизации* (см. раздел 2.1). Тогда на шаге 3 усреднение допустимых точек не выводит за пределы допустимого множества X , то есть $\bar{x} \in X$, и Базовый алгоритм становится алгоритмом условной распределенной оптимизации, хотя и теряет в гарантированной скорости сходимости.

Однако более универсальный и зачастую более эффективный с вычислительной точки зрения способ учета ограничений основан на использовании *принципа двойственности*.

Так, если выпуклое допустимое множество X задается системой линейных уравнений $Ax = b$ для некоторой $n \times n$ матрицы A и вектора $b \in \mathbb{R}^n$, принцип двойственности гласит, что

$$\max_{x \in X} F(x) = F(x^*) = L(x^*, \lambda^*) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \max_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda),$$

где $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda(Ax - b)$ – *функция Лагранжа*.

Иначе говоря, задача условной максимизации функции $F(x)$ сводится к безусловной оптимизации соответствующей функции Лагранжа $L(x, \lambda)$, помимо вектора состояния системы x зависящей также от вектора-строки *двойственных переменных* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Переменные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, также называемые *мно-*

жителями Лагранжа, или теневыми ценами, играют роль штрафов за нарушение условия $Ax = b$, и принцип двойственности для выпуклой оптимизации гарантирует существование таких штрафов $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$, что условный максимум функции $F(x)$ совпадает с безусловным максимумом функции $L(x, \lambda^*)$.

Минимизация функции $\tilde{L}(\lambda) := \max_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$ называется *двойственной задачей*. Она эффективно решается, так как функция $\tilde{L}(\lambda)$ всегда выпукла. Основу так называемых *двойственных методов* оптимизации составляет чередование двух шагов:

1. Найти решение $x(t+1)$ *прямой задачи* $\max_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda(t))$ при фиксированных ценах $\lambda(t)$.
2. Скорректировать цены $\lambda(t+1)$, решив двойственную задачу $\min_{\lambda} L(x(t+1), \lambda)$ при фиксированном $x(t+1)$.

На практике ограничиваются одной итерацией уточнения x и λ на каждом шаге, так что решение ищется и цены уточняются одновременно. Простой алгоритм для шага 2 состоит в сокращении *невязки*: $\lambda(t+1) = \lambda(t) - \mu(t)(Ax(t+1) - b)^T$, где $\mu(t) > 0$ – множитель, в общем случае зависящий от итерации t .

Если информация об ограничениях распределена между элементами системы, то оценка невязки уже потребует распределенных вычислений. Пусть вектор-столбцы $A^{(i)}$ и $b^{(i)}$ известны i -му элементу, $i = 1, \dots, n$, и $A = [A^{(1)}, \dots, A^{(n)}]$, $b = \sum_{i=1}^n b^{(i)}$. Для целевой функции, представимой в виде суммы $F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ функция Лагранжа также записывается в виде суммы

$$(7) \quad L(x, \lambda(t)) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_i) + \lambda(t)A^{(i)}x_i - \lambda(t)b^{(i)}],$$

то есть прямая задача распадается на n задач безусловной оптимизации, которые могут решаться независимо соответствующими элементами системы. Двойственный метод для этой задачи называется *методом двойственной декомпозиции*.

Улучшить сходимость двойственных методов (особенно для негладких функций, где невозможно гарантировать монотонную сходимость) можно дополняя в функции Лагранжа линейную функцию штрафа $\lambda(Ax - b)$ квадратичным слагаемым

$-\frac{\mu}{2}\|Ax - b\|^2$ (играющим ту же роль, что и слагаемое $-\frac{\mu}{2}\|x - \bar{x}\|^2$ в функции (2) выше), где $\mu > 0$ – коэффициент, который (в отличие от классического метода штрафных функций) нет необходимости менять от итерации к итерации.

Техническое преимущество *модифицированной функции Лагранжа* $L_\mu(x, \lambda)$ состоит в том, что, в отличие от исходной функции Лагранжа, она дифференцируема при более слабых ограничениях, а недостаток – то, что она уже не декомпозируется, как выражение (7).

Метод множителей, также называемый *методом модифицированной функции Лагранжа*, состоит в чередовании шагов:

1. Найти точку максимума модифицированной функции Лагранжа

$$x(t+1) = \operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}^n} \left[F(x) + \lambda(t)(Ax - b) - \frac{\mu}{2}\|Ax - b\|^2 \right]$$

при фиксированной вектор-строке теневых цен $\lambda(t)$.

2. Скорректировать цены при фиксированном $x(t+1)$:

$$\lambda(t+1) = \lambda(t) - \mu(Ax(t+1) - b)^T.$$

Отметим, что при обновлении теневых цен на шаге 2 используется коэффициент μ из модифицированной функции Лагранжа. Для сходимости метода достаточно вогнутости функции $F(x)$ и существования у модифицированной функции Лагранжа седловой точки – такой пары x^*, λ^* , что

$$L_\mu(x, \lambda^*) \leq L_\mu(x^*, \lambda^*) \leq L_\mu(x^*, \lambda) \text{ для всех } x \text{ и } \lambda.$$

Популярным обобщением метода множителей является *метод множителей с переменными направлениями* (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) [13]. Он предназначен для максимизации суммы вогнутых функций $F(x) + G(z)$ по $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ при линейном ограничении типа равенства $Ax + Bz = b$ и на итерации t предполагает выполнение шагов:

1x. Найти $x(t+1) = \operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}^n} L_\mu(x, z(t), \lambda(t))$.

1z. Найти $z(t+1) = \operatorname{argmax}_{z \in \mathbb{R}^m} L_\mu(x(t+1), z, \lambda(t))$.

2. Обновить цены:

$$\lambda(t+1) = \lambda(t) - \mu(Ax(t+1) + Bz(t+1) - b)^T.$$

Шаги 1x и 1z соответствуют шагу 1 метода множителей и состоят в максимизации модифицированной функции Лагранжа сначала по переменной x , а потом – по переменной z . Шаг 2 идентичен методу множителей. Алгоритм ADMM имеет широкий спектр применения. Он удобен как универсальный шаблон, компоненты которого можно по-разному интерпретировать, получая различные задачи условной и безусловной, централизованной и распределенной оптимизации. Приведем пример.

Пример 6. С помощью приема «размножения» переменной x максимизацию функции (1) можно записать как задачу

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n F_i(x^{(i)}) \rightarrow \max \text{выбором } x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{R}^n$$

при дополнительных условиях *согласования*

$$(9) \quad x^{(i)} - z = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, n.$$

Элемент системы с номером i выбором вектора $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ максимизирует «свое» слагаемое $F_i(x^{(i)})$ целевой функции, и проблема сводится к *согласованию* значения вектора $x^{(i)}$ с другими элементами для выполнения условий (9) и обеспечения глобальной оптимальности функции (8), то есть к задаче консенсуса (модели консенсуса подробно рассматриваются в разделе 3.2). •

Декомпозиция (8)–(9) позволяет использовать ADMM для оптимизации аддитивной функции (1). Так как

$$L_\mu(\cdot) = \sum_{i=1}^n \left[F_i(x^{(i)}) + \lambda_i(x^{(i)} - z) - \frac{\mu}{2} \|x^{(i)} - z\|^2 \right],$$

шаги ADMM записываются следующим образом:

$$1x^{(i)}. \quad x^{(i)}(t+1) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmax}} \left[F_i(x) + \lambda^{(i)}(t)(x - z(t)) - \frac{\mu}{2} \|x - z(t)\|^2 \right], \\ i = 1, \dots, n,$$

$$1z. \quad z(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x^{(i)}(t+1) + \frac{1}{\mu} \lambda^{(i)}(t)^\top \right),$$

$$2^{(i)}. \quad \lambda^{(i)}(t+1) = \lambda^{(i)}(t) - \mu \left(x^{(i)}(t+1) - z(t+1) \right)^\top, \\ i = 1, \dots, n,$$

С учетом того что, как легко проверить, $\sum_{i=1}^n \lambda^{(i)}(t) = 0$ для $t > 1$, вспомогательный вектор $z(t)$ равен среднему состоянию системы $\bar{x}(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)}(t)$ для всех итераций $t > 1$.

Таким образом, i -й элемент может выполнять шаги $1x^{(i)}$ и $2^{(i)}$ локально. Шаг $1z$, аналогично шагу 3 Базового алгоритма, состоит в сборе локальных оценок состояния $x^{(i)}(\cdot)$, их усреднении и передаче среднего состояния $\bar{x}(\cdot)$ обратно элементам. В случае сложной сетевой структуры графа коммуникаций шаг $1z$ заменяется на смешивающую динамику по формуле (3).

Пример 7. Вычислим с помощью распределенного алгоритма ADMM оптимальное состояние электроэнергетической системы из примера 3. Как и в примере 5, структура коммуникации между элементами – цикл с равными весами соседей, и начальное состояние $x_j^{(i)}(1) = r_j$, $j = 1, \dots, n$, то есть каждый элемент за неимением другой информации предполагает, что остальные элементы – его копии. Значение коэффициента $\mu \approx 5$ обеспечивает самую быструю сходимость ADMM.

На рис. 2.2.4 приведена динамика ошибки метода ADMM при $\mu = 5$ в сравнении с «чемпионами» среди централизованных и распределенных методов безусловной оптимизации из примера 5. Видно, что ADMM превосходит по скорости сходимости распределенный метод Ю. Нестерова, но «не дотягивает» до централизованного метода «тяжелого шарика». Тем не менее среди распределенных методов с рассматриваемой структурой коммуникаций (кольцо) ADMM уверенно лидирует.

При равном числе сеансов связи ADMM требует передачи меньшего объема информации по сравнению с другими распределенными методами, поскольку не требуется передавать текущие оценки градиентов. Достигается это ценой увеличения объема локальных вычислений, поскольку на шаге $1x^{(i)}$ каждой итерации алгоритма ADMM каждый элемент должен локально решить полноразмерную задачу безусловной оптимизации. В то же время в большинстве приложений вычисления существенно «дешевле» сеансов связи, и практическая производительность ADMM при этих условиях будет выше. При этом скорость вы-

числения точек максимума на шаге $1x^{(i)}$ можно повышать за счет снижения точности, использования ускоренных методов и т.п.

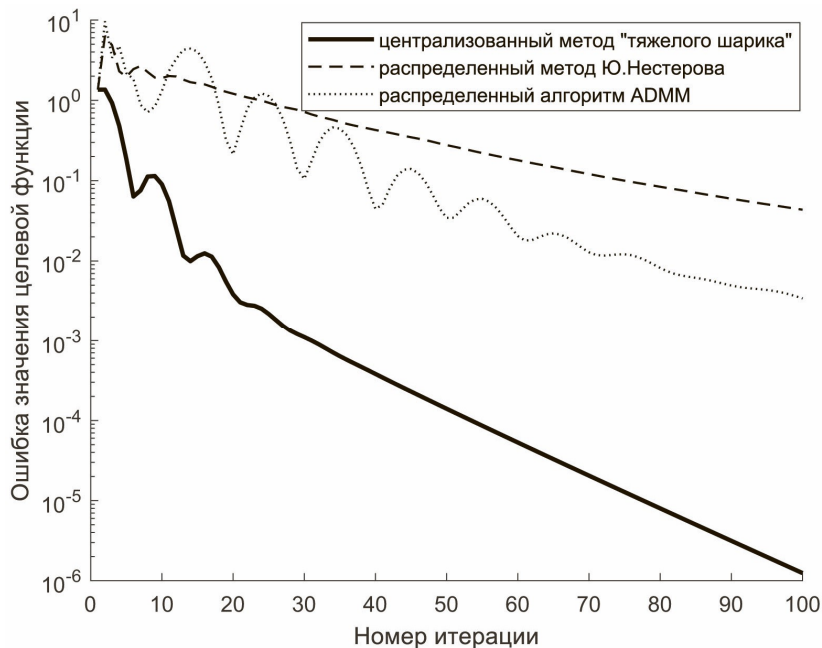


Рис. 2.2.4. Сравнение ошибки значения целевой функции алгоритма ADMM с самым быстрым централизованным и распределенным методами из примера 5 (логарифмическая шкала)

На рис. 2.2.5 показана траектория состояния системы в алгоритме ADMM по сравнению с лучшим централизованным и распределенным методами. Видна характерная колебательность состояния, приводящая к немонотонной сходимости метода. •

В [13, 22] описано большое число примеров использования алгоритма ADMM для решения задач оптимизации в различных областях – от экономики до машинного обучения.

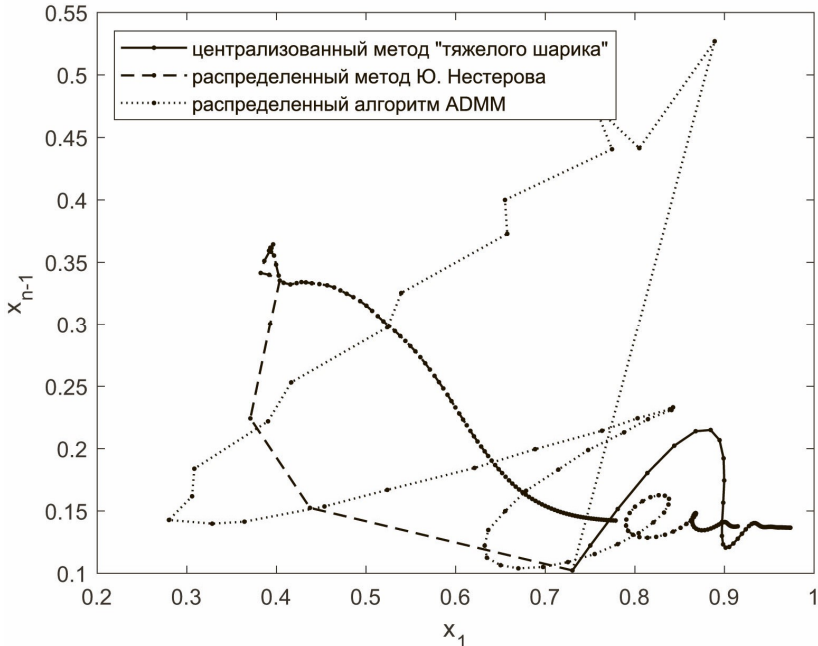


Рис. 2.2.5. Сравнение 100 первых итераций траектории метода ADMM (в координатах (x_1, x_{n-1})) с самым быстрым централизованным и распределенным методами из примера 5

6. Смежные вопросы распределенной оптимизации

6.1. РЫНОК КАК МНОГОАГЕНТНАЯ СИСТЕМА

Классической задачей распределенной выпуклой оптимизации является поиск *эффективного рыночного равновесия*. Рассмотрим ее на примере энергетической системы из примера 3.

Пример 8. Декомпозиция целевой функции в примере 3 на компоненты $F_i(x) = p(x_1 + \dots + x_n)x_i - c_i(x_i)$ не является единственно возможной. Например, одна из электростанций или новый элемент системы может взять на себя координацию взаимодействия станций с внешними потребителями.

Введем *администратора торговой системы* (АТС) с целевой функцией $F_{n+1}(x) = p(g)g - \lambda g$ (напомним, что g – это со-

кращение для суммарной генерации $x_1 + \dots + x_n$), выбирающего действительную переменную – внутреннюю цену λ . Тогда целевая функция $F_i(x) = \lambda x_i - c_i(x_i)$ станции $i = 1, \dots, n$ зависит только от выбираемой ею мощности x_i и цены λ , выбираемой АТС. При этом станция может знать только свою себестоимость, а АТС может знать только функцию цены $p(\cdot)$.

Оптимальное состояние системы реализует простой алгоритм торговли (*tâtonnement*), в котором на итерации $t = 1, 2, \dots$:

1. АТС сообщает станциям цену

$$(10) \quad \lambda(t+1) = \lambda(t) + \mu [p(g(t)) + p'(g(t))g(t) - \lambda(t)],$$

2. Станции выбирают свои объемы генерации $x_i(t+1) = \operatorname{argmax}_{x_i} F_i(x_i, \lambda(t+1))$, сообщая их АТС.

Начальная цена $\lambda(1)$ может быть произвольной. Обновление внутренней цены по формуле (10) играет ту же роль, что обновление теневых цен в двойственных методах (см. пункт 5).

На рис. 2.2.6 показана динамика ошибки целевой функции рыночного механизма при $\mu = 0,1$ по сравнению с централизованным градиентным методом при μ как в примере 5, а также динамика расстояния до оптимума.

Рисунок показывает чрезвычайно быструю сходимость рыночного алгоритма (до машинной точности менее чем за 40 итераций), притом что на каждой итерации генераторы решают простейшие одномерные задачи оптимизации.

При этом информированность элементов и выбираемые ими переменные не нарушают условий задачи управления в распределенной системе (см. пример 3). Постановка задачи может быть усложнена за счет учета реактивной мощности генераторов, топологии электрической сети, управления напряжением и т.п. [20]. При этом вместо единой рыночной цены появляются *локальные маржинальные цены* для каждого узла электрической сети, но общий подход остается тем же.

Поддержание работы централизованной торговой системы в масштабах российской энергосистемы не представляет сложности, однако при необходимости не менее эффективно можно реализовать и сетевой вариант рынка без АТС, включив в состав системы потребителей и заменив централизованный процесс

установления рыночной цены двусторонними переговорами, где стороны определяются графом коммуникаций. Разработкой эффективных протоколов подобных переговоров занимается теория сетевых рынков (см., например, [15]). Для энергетических рынков эти идеи активно обсуждаются в рамках концепции «Интернета энергии» [3]. •

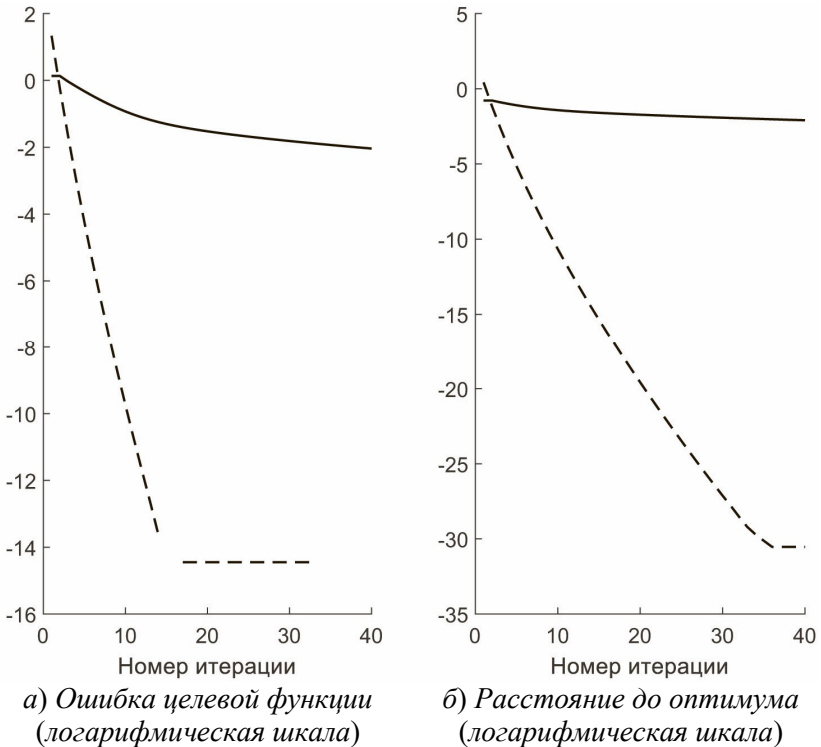


Рис. 2.2.6. Сходимость алгоритма торговли (пунктир) по сравнению с централизованным градиентным методом (сплошная)

6.2. МАНИПУЛИРУЕМОСТЬ АЛГОРИТМОВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В предыдущем пункте рассматривался пример максимизации прибыли электроэнергетической системы. Декомпозиция целевой функции позволила свести поиск оптимального состоя-

ния системы к набору одномерных задач оптимизации, эффективно решаемых электростанциями при минимальной координатии. Если единственной целью станций является максимизация целевой функции системы, проблем не возникает. Однако если в реальности элементы выступают как самостоятельные экономические агенты, их целевые функции описывают их интересы, в общем случае отличные от интересов всей системы.

Пример 9. В примере 3 электростанции имеют целевые функции $F_i(x) = p(x_1 + \dots + x_n)x_i - c_i(x_i)$. Если они выступают как экономические агенты на общем рынке, конкурируя за потребителей, их интересы отличаются; уже отмечалось, что каждому агенту выгодно чтобы он остался монополистом, то есть чтобы генерация других агентов была как можно меньше (вплоть до отрицательной). Эта ситуация соответствует классической модели олигополии Курно [4], исследуемой с помощью аппарата теории игр (см. главу 5). •

Применению аппарата теории некооперативных игр в задачах управления посвящен раздел 5.3. Здесь лишь отметим, что исходом взаимодействия между агентами является некоторое равновесное состояние системы, и проблема в том, что это равновесное состояние часто (например, в олигополии Курно) отличается от оптимального.

В этой ситуации задача управления состоит в выборе воздействия на систему – управления, которое заставило бы агентов выбрать оптимальное состояние системы, а не равновесное, как в отсутствие управления.

Пример 10. Пусть в примере 8 АТС играет роль посредника между станциями и рынком и финансовые расчеты между ним и станциями действительно происходят по цене λ . Тогда внутренняя цена $\lambda^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ (см. пример 8) делает выбор оптимальных состояний x_i^* выгодным для станций. •

Большие трудности в поиске оптимального управления создает незнание целевых функций агентов. Так, если бы АТС в примере 10 точно знал функции себестоимости, он бы смог за одну итерацию установить оптимальную цену λ^* . Однако и применение схемы tâtonnement, как и любого другого алгоритма координации (и, более общо, распределенной оптимизации),

в условиях конфликта интересов агентов не вполне безопасно.

Пример 11. Пусть в примере 10 $n = 2$, станции имеют квадратичные функции себестоимости $c_i(x_i) = x_i^2/2r_i$ с параметрами эффективности $r_1 = 1$, $r_2 = 5$, цена описывается убывающей функцией $p(g) = 2A - g$ с емкостью рынка $A = 5$. Пусть на шаге 2 каждой итерации алгоритма tâtonnement менее эффективный агент 1 честно выбирает $x_1(t + 1) = \operatorname{argmax}_{x_1} F_1(x_1, \lambda(\cdot))$, то есть $x_1(t + 1) = r_1 \lambda(\cdot)$. Второй же агент выбирает $x_2(t + 1) = r_1 \lambda(\cdot)$, то есть искажает свой выбор, «маскируясь» под менее эффективного агента 1. На рис. 2.2.7 показана динамика целевой функции системы $F(x)$, внутренней цены λ , а также целевых функций обоих агентов по сравнению с ситуацией «честной игры» из примера 10.

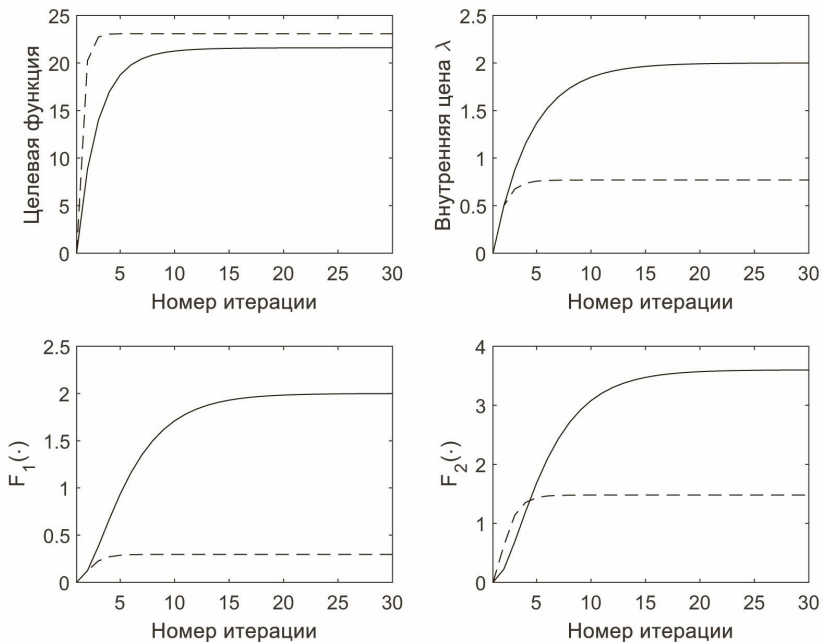


Рис. 2.2.7. Ситуация «манипулирования» вторым агентом (сплошная) по сравнению с ситуацией «честной игры» (пунктирная)

Из рис. 2.2.7 видно, что в результате *манипулирования* выбором второго агента система оказывается в неоптимальном состоянии (целевая функция на левом верхнем рисунке стабилизируется на меньшем уровне) при более высокой (как видно из рисунка справа сверху) внутренней цене. Однако при этом целевая функция второго агента (правый нижний рисунок) выше, чем в случае «честной игры», то есть манипулирование для него выгодно. Интересно также, что выросла и целевая функция первого агента (левый нижний рисунок), то есть ему также выгодно, чтобы второй агент манипулировал своим выбором. •

Манипулирование является серьезной опасностью для алгоритмов распределенной оптимизации, суть которых заключается в максимальном использовании частной информации агентов. Если агенты не будут заинтересованы в сообщении достоверной информации о параметрах своих целевых функций, они могут ее исказить. В результате под угрозой оказывается эффективность и устойчивость алгоритма.

Таким образом, алгоритмы распределенной оптимизации должны создаваться устойчивыми к манипулированию со стороны агентов системы, что является нетривиальной задачей. Созданием неманипулируемых алгоритмов управления в распределенных системах, включающих экономических агентов, занимается *теория алгоритмических игр* [0], *теория механизмов управления* [1, 2, 14] и *теория управления организационными системами* [6] (также см. главу 5).

6.3. ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ГРАФА КОММУНИКАЦИЙ

Сходимость алгоритма распределенной оптимизации в общем случае зависит от структуры графа коммуникаций. Для большинства итерационных алгоритмов, в частности, Базового алгоритма, необходимым условием сходимости из произвольной начальной точки является сильная связность графа [11]. В подразделе 4 приводятся более сильные требования к динамическим структурам коммуникаций и весам w_{ij} , достаточные для сходимости алгоритмов типа распределенного градиентного метода.

Скорость сходимости также зависит от структуры графа коммуникаций. Динамический консенсус на основе взвешенного усреднения с помощью дважды стохастической матрицы весов $W = (w_{ij})$ является частным случаем марковского процесса. Известно, что ключевым фактором, определяющим скорость сходимости марковской цепи, является *перемешивающее свойство* матрицы весов W . Оно определяется *модулем второго собственного числа* (Second Largest Eigenvalue Modulus, SLEM) матрицы W , то есть величиной $\max\{\lambda_2(W), -\lambda_n(W)\}$, где $\lambda_i(W)$ – собственные числа матрицы W , перечисляемые в порядке убывания. Чем меньше SLEM, тем быстрее марковская цепь сходится к равновесию, и, соответственно, быстрее устанавливается консенсус и быстрее сходятся алгоритмы распределенной оптимизации.

В [12] задача минимизации SLEM выбором весов заданного графа сведена к (выпуклой) задаче полуопределенного программирования, которая может эффективно решаться для графов с тысячами вершин. Для графов большего размера можно воспользоваться эвристическим алгоритмом Метрополиса-Хастингса [26] или более сложными эвристиками [12].

Поиск графа из заданного класса, оптимальное назначение весов на котором дает минимальный SLEM, в общем случае является сложной задачей дискретной оптимизации. В то же время считается, что хорошими перемешивающими свойствами обладают топологии случайных графов типа Эрдёша – Реньи.

6.4. РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В подразделах 4 и 5 описаны алгоритмы распределенной выпуклой оптимизации. Однако потребности теории управления выпуклой оптимизацией не исчерпываются. Решению задач невыпуклой оптимизации посвящен раздел 2.3. Общая идея состоит в том чтобы использовать для решения таких задач те же итерационные алгоритмы (как централизованные, так и распределенные), что и для выпуклой. При этом для отдельных частных случаев удастся гарантировать сходимость к оптимальному решению.

Для дискретных (комбинаторных) задач, в которых выбираемые элементами системы переменные принимают конечное число значений, не существует общей теории распределенной оптимизации, однако такие алгоритмы есть для отдельных задач. В частности, для классической задачи о выделении *кратчайшего остовного дерева* из заданного графа, играющей важную роль в телекоммуникациях, был разработан эффективный распределенный алгоритм [0] сложности $O(n \cdot \ln n)$, где n – число вершин. Самый быстрый известный алгоритм [23] имеет сложность $O(\sqrt{n} \log n + D)$, где D – диаметр графа. Вершинам графа соответствуют агенты, которые имеют только локальную информацию о весах инцидентных ребер и могут обмениваться ей только с соседями. Известны также распределенные алгоритмы для *задачи о раскраске графа* [10].

Наиболее общей идеей, которая помогает строить алгоритмы распределенной комбинаторной оптимизации на основе многоагентных систем, является концепция рыночного равновесия. Аналогично тому, как в примере 8 взаимодействие агентов эффективно декомпозировалось механизмом рыночного ценообразования, многие задачи теории расписаний могут рассматриваться как рынок экономических агентов, максимизирующих прибыль и взаимодействующих друг с другом посредством ценовых сигналов и двухсторонних контрактов [8].

7. Принципы проектирования и анализа алгоритмов распределенной оптимизации

Выше рассматривались преимущественно *синхронные* алгоритмы распределенной оптимизации, предполагающие фиксированное чередование вычислений, операций приема и передачи информации. Такие алгоритмы существенно удобнее для теоретического исследования, получения оценок трудоемкости и скорости сходимости. Однако на практике в условиях ненадежных сетей коммуникации со случайным временем задержки передачи, возможностью потери пакетов или обрыва связи, алгоритмы должны быть *асинхронными*, то есть предполагать возможность продолжения вычислений (возможно, с меньшей

эффективностью) при наличии только части исходных данных. В асинхронных аналогах [28, 34, 36] алгоритмов оптимизации из подразделов 4 и 5 информация от соседей поступает «вразнобой» и должна учитываться элементом по мере ее поступления.

Полное описание алгоритма распределенной оптимизации включает указание того, на каком вычислителе проводится каждое вычисление, какая информация, откуда, куда, по каким каналам связи и в какой момент передается.

При анализе реальных алгоритмов важно учитывать:

1. Ограниченность вычислительных ресурсов, различия в вычислительной мощности каждого элемента системы.

2. Возможности распараллеливания вычислений на одном устройстве, в частности возможность продолжения вычислений в процессе информационного обмена.

3. Доступность всех исходных данных для вычислений.

4. Возможности и ограничения каналов связи, в том числе возможность открытия и поддержания нужного числа параллельных каналов, пропускную способность и время задержки передачи пакета, правила обработки очередей пакетов, динамичку изменения структуры сети.

На дизайн оптимального алгоритма могут оказать влияние и более «тонкие» особенности устройств, на которых реализуются распределенные алгоритмы: объем памяти и число регистров, доступность арифметики с плавающей точкой и многое другое.

Литература

1. БРЕМЗЕН А.С., ГУРИЕВ С.М. *Конспекты лекций по теории контрактов : Учебное пособие.* – М.: Российская экономическая школа, 2005. – 72 с.
2. БУРКОВ В.Н. и др. *Механизмы управления: мультифункциональное учебное пособие.* – М.: ЛЕНАНД, 2011. – 192 с.
3. ВОРОПАЙ Н.И. и др. *Проблемы развития цифровой энергетики в России // Проблемы управления.* – 2019. – №1. – С. 2–14.
4. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* – М.: Синтег, 2002. – 148 с.

5. НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию*. – М.: МЦНМО, 2010. – 262 с.
6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2012. – 584 с.
7. ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию*. – М.: URSS, 2014. – 392 с.
8. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
9. РЖЕВСКИЙ Г.А., СКОБЕЛЕВ П.О. *Как управлять сложными системами? Многоагентные технологии для создания интеллектуальных систем управления предприятиями*. – Самара: Офорт, 2015. – 290 с.
10. VARENBOIM L., ELKIN M. *Distributed Graph Coloring: Fundamentals and Recent Developments* // Synthesis Lect. on Distrib. Comp. Theory. – 2013. – Vol. 4, No. 1. – P. 1–171.
11. BERTSEKAS D.P., TSITSIKLIS J.N. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989. – 730 с.
12. BOYD S., DIACONIS P., XIAO L. *Fastest Mixing Markov Chain on a Graph* // SIAM review. – 2004. – Vol. 46, No. 4. – P. 667–689.
13. BOYD S. et al. *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers* // Foundations & Trends in Mach. Learn. – 2011. – Vol. 3, No. 1. – P. 1–122.
14. CHIRKIN V. et al. *Gaming Experiments for Analysis of Pricing Mechanisms at Electricity Markets* // Proc. of Cyber-Physical & Human-Systems CPHS-2016 Conference. – IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49, No. 32. – P. 13–18.
15. COROMINAS-BOSCH M. *Bargaining in a Network of Buyers and Sellers* // J. Econ. Theory. – 2004. – Vol. 115, No. 1. – P. 35–77.
16. DEGROOT M.H. *Reaching a Consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.
17. FRENCH J. *A Formal Theory of Social Power* // Psychol. Rev. – 1956. – Vol. 63. – P. 181–194.

18. GALLAGER R.G., HUMBLET P.A., SPIRA P.M. *A Distributed Algorithm for Minimum-Weight Spanning Trees* // ACM Trans. Program. Lang. and Syst. (TOPLAS). – 1983. – Vol. 5, No. 1. – P. 66–77.
19. HARARY F. *A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power* // In: *Studies in Social Power* / D. Cartwright, editor. – Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1959. – P. 168–182.
20. HUNEAULT M., GALIANA F.D. *A Survey of the Optimal Power Flow Literature* // IEEE Trans. Power Syst. – 1991. – Vol. 6, No. 2. – P. 762–770.
21. LOPES C.G., SAYED A.H. *Distributed Processing over Adaptive Networks* // 9th Int. Symp. Signal Processing and Its App. – NY: IEEE. – 2007. – URL: <https://doi.org/10.1109/ISSPA.2007.4555636> (дата обращения: 15.03.2019).
22. KRANING M. et al. *Dynamic Network Energy Management via Proximal Message Passing* // *Foundations and Trends in Optimization*. – 2014. – Vol. 1, No. 2. – P. 73–126.
23. KUTTEN S., PELEG D. *Fast Distributed Construction of Small-Dominating Sets and Applications* // *J. of Algorithms*. – 1998. – Vol. 28, No. 1. – P. 40–66.
24. MARSCHAK J. *Elements for a Theory of Teams* // *Management science*. – 1955. – Vol. 1, No. 2. – P. 127–137.
25. MARSCHAK J., RADNER R. *Economic Theory of Teams*. – New Haven: Yale University Press, 1972. – 345 p.
26. METROPOLIS N. et al. *Equations of State Calculations by Fast Computing Machines* // *J. Chem. Phys.* – 1953. – No. 21. – P. 1087–1092.
27. NEDIĆ A, OZDAGLAR A. *Distributed Subgradient Methods for Multi-Agent Optimization* // IEEE Trans. Autom. Control. – 2009. – No. 54. – P. 48–61.
28. NEDIĆ A. *Asynchronous Broadcast-Based Convex Optimization over a Network* // IEEE Trans. Autom. Control. – 2011. – No. 56. – P. 1337–1351.
29. NEDIĆ A., OLSHEVSKY A., SHI W. *Achieving Geometric Convergence for Distributed Optimization over Time-Varying Graphs* // *SIAM J. on Optimization*. – 2017. – Vol. 27, No. 4. – P. 2597–2633.

30. NISAN N. et al. (Eds.) *Algorithmic Game Theory*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 776 p.
31. OLFATI-SABER R.M., MURRAY R.M. *Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays* // IEEE Trans. Autom. Control. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1520–1533.
32. RADNER R. *Team Decision Problems* // Ann. Math. Stat. – 1962. – Vol. 33, No. 3. – P. 857–881.
33. TSITSIKLIS J.N. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. – Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Eng. Comp. Sci., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1984. – 264 p.
34. TSITSIKLIS J., BERTSEKAS D., ATHANS M. *Distributed Asynchronous Deterministic and Stochastic Gradient Optimization Algorithms* // IEEE Trans. Autom. Control. – 1986. – Vol. 31, No. 9. – P. 803–812.
35. VAN ZANDT T. *The Scheduling and Organization of Periodic Associative Computation: Efficient Networks* // Review of Economic Design. – 1998. – Vol. 3, No. 2. – P. 93–127.
36. WEI E., OZDAGLAR A. *On the $O(1/k)$ Convergence of Asynchronous Distributed Alternating Direction Method of Multipliers* // arXiv preprint. – arXiv:1307.8254, 2013. – 30 p.
37. XI C., KHAN U. *On the Linear Convergence of Distributed Optimization over Directed Graphs* // arXiv preprint. arXiv:1510.02149, 2015. – 34 p.
38. YU W., WEN G., CHEN G., CAO J. *Distributed Cooperative Control of Multi-Agent Systems*. – Wiley, 2017. – 242 p.

2.3. НЕВЫПУКЛАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Балашов М.В.¹

1. Введение

Настоящий раздел содержит некоторые сведения по невыпуклой оптимизации. В то время как выпуклая оптимизация уже стала классикой и имеет характерные тематические разделы (такие, например, как полиэдральная оптимизация/выпуклость, гладкая и негладкая выпуклая оптимизация), в невыпуклой оптимизации пока не сложились такие же мощные магистральные направления, как в выпуклой. В то же время сегодня интерес к невыпуклой оптимизации растет, в частности в связи с новыми задачами классификации и задачами обучения нейронных сетей.

Цель раздела – ознакомить читателя с некоторыми результатами, которые активно развиваются последние десятилетия и претендуют на существенные позиции при исследовании и решении невыпуклых оптимизационных задач.

Основное внимание уделено проекционным и, в частности, градиентным методам и выделению классов невыпуклых объектов, для которых эти методы дают хорошие результаты. Особое внимание уделяется свойству типа ограничения ошибки для функций и проксимальной гладкости для множеств. Эти свойства позволяют в ряде случаев частично или полностью отказаться от выпуклости без особых потерь.

2. Невыпуклая оптимизация и возникающие проблемы

Огромное число как теоретических, так и прикладных задач требует решения задачи безусловной минимизации вида

$$(1) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

¹Максим Викторович Балашов, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.ф.-м.н., доцент (balashov73@mail.ru).

или задачи поиска условного минимума вида

$$(2) \quad \min_{x \in A} f(x), \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

с невыпуклой функцией и/или множеством. Функция f в задачах обычно считается как минимум непрерывной по Липшицу, а множество A в задаче (2) обычно считается как минимум замкнутым.

Важные примеры невыпуклых экстремальных задач возникают в *оптимальном управлении* [7, глава 3, раздел 3.5]. Например, задача оптимального управления

$$x' = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^k, \quad t \in [0, T],$$

с терминальным функционалом $F(x(T)) \rightarrow \min$ является (бесконечномерной) невыпуклой экстремальной задачей.

К невыпуклым экстремальным задачам приводит задача построения такого регулятора обратной связи в линейной управляемой системе

$$x' = Ax + Bu, \quad u = Kx,$$

что матрица K должна минимизировать некоторый гладкий функционал $F(K)$.

Еще один важный пример невыпуклых задач дают задачи вида

$$\min_{X \in S} F(X),$$

где S – некоторое компактное многообразие, которое, естественно, не является выпуклым, а функция F – гладкая функция от X [13]. Например, в качестве S может фигурировать *многообразие Штифеля* $S = S_{n,k} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} \mid X^T X = I_k\}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Обе задачи (1) и (2) являются задачами поиска глобально экстремума. Алгоритмическая сложность таких задач хорошо исследована [2]. В общей ситуации – без какой-либо дополнительной информации о функции f и множестве A – надеяться на эффективное решение подобных задач с высокой точностью не приходится.

Пример 1. В качестве обескураживающего примера напомним оценку вычислительной сложности для задачи

$$\min_{x \in B_n} f(x)$$

на кубе $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$, где функция f невыпукла и удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|_\infty$ относительно чебышевской нормы $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Рассмотрим простейший метод равномерного перебора, то есть для некоторого натурального p формируется $(p+1)^n$ точек вида

$$x_{i_1, \dots, i_n} = \left(\frac{i_1}{p}, \dots, \frac{i_n}{p} \right), \quad i_k \in \{0, 1, \dots, p\}, 1 \leq k \leq n,$$

и выбирается та из них, где функция f достигает минимума.

В [2, §1.1] показано, что если взять $\varepsilon > 0$, $L > 0$, $p = \lceil \frac{L}{2\varepsilon} \rceil$ и $f(x) = \min\{0, L\|x - x_*\|_\infty - \varepsilon\}$, то при подходящем выборе x_* («между» точками x_{i_1, \dots, i_n}) придется проверить все $(p+1)^n$ точек (и так и не будет найдено точное решение с точностью $< \varepsilon$). Иными словами, нижняя оценка сложности представленного метода перебора есть $\lceil \frac{L}{2\varepsilon} \rceil^n$. Даже при относительно небольшой размерности x ($n = 10$) и точности $\varepsilon = 0,01$ в 1% при $L = 2$ получается астрономическое число. Заметим, что любой другой метод в классе липшицевых функций не может дать лучшего результата. •

Очевидно, что в рассмотренных примерах простое требование $k > 1$ раз дифференцируемости исследуемой на экстремум функции ничего не даст, так как пример, подобный примеру 1, можно легко построить для бесконечно дифференцируемой функции.

Таким образом, помимо гладкости функции (которая в любом случае будет полезна, так как для гладких функций развит мощный аналитический аппарат) требуется еще некоторое условие, которое обеспечивает хорошее свойство решений задач (1) и (2).

Таким условием обычно является выпуклость. Отметим два важнейших свойства задач (1) и (2) с выпуклой функцией f

и множеством A . Во-первых, любая стационарная точка в таких задачах (и в частности любой локальный минимум) является глобальным минимумом. Это крайне важное утверждение означает, в частности, что необходимые условия экстремума в выпуклых экстремальных задачах являются достаточными. Второе важное свойство выпуклых функций состоит в том, что если $f'(x)$ – градиент (или субградиент) функции f в точке x , то для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено субградиентное неравенство $f(y) \geq f(x) + (f'(x), y - x)$. Таким образом, минимум не может содержаться в полупространстве $\{y \in \mathbb{R}^n \mid (f'(x), y - x) > 0\}$. На этом факте основаны многие алгоритмы выпуклой оптимизации, например алгоритмы отсечения [2]. Если говорить про выпуклое замкнутое множество A , то его важное преимущество перед невыпуклыми множествами состоит в том, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует единственная метрическая проекция $P_A x$ точки x на множество A . При этом для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнена оценка $\|P_A x - P_A y\| \leq \|x - y\|$, которая находит многочисленные применения в алгоритмах выпуклой оптимизации.

При отказе от выпуклости теряются указанные важные преимущества и образуется некоторый «хаос». Теперь в рассматриваемых задачах может быть много (даже бесконечно много) локальных минимумов, причем способы перехода от локального экстремума к глобальному не очевидны. Также теряется субградиентное неравенство и прочий полезный формализм выпуклого анализа.

Подводя итог, заметим, что если планируется решать задачи (1) и (2) с невыпуклой функцией f или невыпуклым множеством A , то нужно заменить выпуклость на некоторое условие, которое обеспечит хорошие свойства указанных задач. В частности, крайне полезно было бы гарантировать в указанных задачах, что любой локальный экстремум является глобальным.

3. Функции с непрерывным по Липшицу градиентом. Невыпуклая безусловная оптимизация

Рассмотрим задачу (1). Пусть функция f имеет непрерывный по Липшицу градиент с константой Липшица L_1 :

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L_1 \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Одно из важнейших свойств таких функций состоит том, что для любой функции с непрерывным по Липшицу градиентом функция $f(x) + \frac{L_1}{2} \|x\|^2$ выпукла, а функция $f(x) - \frac{L_1}{2} \|x\|^2$ вогнута [1, теорема 2.1.2]. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Положим $g(x) = f(x) + \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2$. Поскольку функция g выпуклая, то $g(x) \geq g(x_0) + (g'(x_0), x - x_0)$, то есть

$$f(x) \geq f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) - \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2.$$

Аналогично из вогнутости функции $h(x) = f(x) - \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2$ получаем, что

$$f(x) \leq f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2.$$

Итак, для функции с непрерывным по Липшицу градиентом для всех $x_0, x \in \mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$(3) \quad |f(x) - f(x_0) - (f'(x_0), x - x_0)| \leq \frac{L_1}{2} \|x - x_0\|^2.$$

Из формулы (3) вытекает, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$(4) \quad f\left(x - \frac{1}{L_1} f'(x)\right) \leq f(x) - \frac{1}{2L_1} \|f'(x)\|^2.$$

Формула (4) гарантирует уменьшение функции на величину $\frac{1}{2L_1} \|f'(x)\|^2$ при спуске по антиградиенту. Зафиксируем это обстоятельство для дальнейшего.

Обозначим через Ω множество решений в задаче (1), далее будем считать, что $\Omega \neq \emptyset$. Тогда очевидно, что итерационный процесс, называемый *градиентным спуском*,

$$(5) \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L_1} f'(x_k),$$

дает монотонно убывающую и сходящуюся последовательность $\{f(x_k)\}$. Однако не известно, с какой скоростью сходится эта последовательность и не ясно, верно ли $f(x_k) \rightarrow f(\Omega)$.

В [7, глава 3, с. 422] показано, что в случае сильно выпуклой функции с непрерывным по Липшицу градиентом имеет место линейная скорость сходимости метода градиентного спуска.

В невыпуклом случае вместо выпуклости нужно некоторое условие для оценки скорости сходимости.

Одним из первых таких условий было условие Поляка – Лоясевича, предложенное в 1963 году в [5, 17].

Определение 1. Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Поляка – Лоясевича (условие (PL)), если существуют $\mu > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$(6) \quad \|f'(x)\|^\alpha \geq \mu(f(x) - f_*), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $f_* = f(\Omega)$. Мы будем далее считать, что $\alpha = 2$, хотя последнее не обязательно.

Утверждение 1. При выполнении условия (PL) (с $\alpha = 2$) в работе [5] доказано, что метод градиентного спуска (5) сходится с линейной скоростью (то есть со скоростью геометрической прогрессии).

Действительно, введем $\varphi(x) = f(x) - f_*$. Тогда

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{L_1} \|f'(x_k)\|^2 \leq f(x_k) - \frac{\mu}{L_1} (f(x_k) - f_*),$$

или, что то же,

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \left(1 - \frac{\mu}{L_1}\right) \varphi(x_k).$$

Последнее и означает линейную скорость сходимости по значению функции.

В дальнейшем возникли другие условия, аналогичные по смыслу условию (PL). Перечислим их следуя [16]. Здесь для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим $x_\Omega \in P_\Omega x$, где P_Ω – метрический проектор на множество Ω . Заметим, что константа μ в каждом из условий своя.

Определение 2.

1. *Restricted Secant Inequality (RSI):* существует $\mu > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $x_\Omega \in P_\Omega x$ $(f'(x), x - x_\Omega) \geq \mu \|x - x_\Omega\|^2$.

2. *Условие ограничения ошибки (EB):* существует $\mu > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ $\|f'(x)\| \geq \mu \|x - x_\Omega\|$.

3. Условие квадратичного роста (QG): существует $\mu > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) - f(\Omega) \geq \mu \|x - x_\Omega\|^2$.

В качестве примера невыпуклой функции, которая удовлетворяет всем трем условиям, можно привести пример

$$f(x) = 0,55x^2 + \frac{1}{N^2} (\sin Nx - Nx \cos Nx),$$

$x_\Omega = 0$, N – любое натуральное число.

Отметим, что для выпуклых функций все перечисленные условия и условие (PL) эквивалентны. Для невыпуклых функций выполнена цепочка импликаций [16]

$$(RSI) \Rightarrow (EB) \Leftrightarrow (PL) \Rightarrow (QG).$$

Утверждение 2. Докажем, что метод градиентного спуска при выполнении условия (PL) с константой μ имеет также линейную скорость сходимости по точке. Выполнение условия (PL) влечет условие (EB), то есть существует такое число $\mu_1 > 0$, что $\varrho_\Omega(x) = \|x - x_\Omega\| \leq \mu_1 \|f'(x)\|$ для всех x . Учитывая неравенство

$$\|f'(x_k)\|^2 \leq 2L_1 (f(x_k) - f(x_{k+1})) \leq 2L_1 \varphi(x_k),$$

получаем

$$\varrho_\Omega^2(x) \leq 2\mu_1^2 L_1 \varphi(x_k) \leq 2\mu_1^2 L_1 \left(1 - \frac{\mu}{L_1}\right)^k \varphi(x_0).$$

Пример 2. Одно из важных приложений указанных результатов заключается в возможности решения системы $g(x) = 0$ для липшицево дифференцируемого отображения $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ с матрицей Якоби полного ранга: потребуем, чтобы невырожденная положительно определенная матрица $g'(x)g'(x)^T$ имела минимальное собственное значение, которое не менее $\lambda > 0$ для всех x . Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = \|g(x)\|^2$. Из формулы $f'(x) = 2g'(x)^T g(x)$ получается, что функция f имеет липшицев градиент и $\|f'(x)\|^2 = 4g(x)^T g'(x)g'(x)^T g(x)$. Из условия полного ранга для матрицы Якоби $g(x)^T g'(x)g'(x)^T g(x) \geq \lambda \|g(x)\|^2 = \lambda f(x)$. Поэтому выполнено условие (PL) $\|f'(x)\|^2 \geq 4\lambda f(x)$, а значит, градиентный спуск для f сходится с линейной скоростью к точке глобального минимума f , то есть к решению системы $g(x) = 0$. •

В 2012 году Ю. Нестеров [19] предложил для сильно выпуклой функции случайный координатный спуск, который работает быстрее обычного градиентного спуска. Также на каждом его шаге требуется вычисление производной по направлению, что несколько вычислительно дешевле отыскания градиента в \mathbb{R}^n . Приведем этот результат. Его простое доказательство с использованием условия (PL) содержится в [16].

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$f(x + te_i) \leq f(x) + t\nabla_i f(x) + \frac{L_1}{2}t^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь e_i – единичный i -й базисный вектор стандартной прямоугольной декартовой системы координат, а $\nabla_i f(x)$ – производная f в точке x по направлению e_i . Всякая функция с непрерывным по Липшицу градиентом удовлетворяет этому условию. Пусть множество Ω глобальных минимумов f непусто и $f_* = f(\Omega)$. Пусть функция удовлетворяет условию (PL) с константой μ . Рассмотрим итерации $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L_1} (\nabla_{i_k} f(x_{i_k})) e_{i_k}.$$

Утверждение 3. [16] *Если выбирать индексы i_k равномерно распределенными на множестве $\{1, \dots, n\}$, то математическое ожидание $E[f(x_k) - f_*]$ сходится с линейной скоростью:*

$$E[f(x_k) - f_*] \leq \left(1 - \frac{\mu}{nL_1}\right)^k (f(x_0) - f_*).$$

Отметим одну недавнюю работу [12], в которой рассматривается условие типа (ЕВ) для задачи (1), в которой $f(x) = h(x) + \psi(x)$, где функция h имеет непрерывный по Липшицу градиент, а ψ – выпуклая и в общем случае негладкая функция. Для такого вида функций f обсуждаются условия ограничения ошибки и на их основе доказывается сходимость с линейной скоростью методов-аналогов градиентного спуска.

Заметим, что, как и в случае выпуклой оптимизации, метод градиентного спуска следует использовать на начальном этапе решения. В случае когда итерации «пошли достаточно близко»

к решению задачи и гладкость функций позволяет, предпочтительнее завершать итерации методом Ньютона, который не требует выпуклости функций и сходится со сверхлинейной скоростью. Обратим внимание на работу [20], где за счет кубической регуляризации метода Ньютона в ряде случаев получена глобальная сверхлинейная скорость сходимости регуляризованного метода (при этом вычислительная сложность каждого шага метода дороже, чем, скажем, градиентного спуска, и это надо иметь в виду).

4. Проксимально гладкие множества и их использование в проекционных алгоритмах

Рассмотрим задачу (2). Если отказаться от выпуклости множества A , то сразу возникают проблемы. Например, все проекционные методы перестают работать, поскольку метрическая проекция точки на произвольное замкнутое множество A определена неоднозначно (а в бесконечномерном пространстве может и не существовать). Кроме того, метрическая проекция на произвольное замкнутое подмножество из \mathbb{R}^n не непрерывна, как многозначное отображение, по проецируемой точке. Всё это приводит к известным затруднениям. Поэтому внимание математиков, а также специалистов по негладкому анализу и оптимизации давно стало приковано ко множествам, которые обладают «чебышевским слоем». Последнее для замкнутого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ означает, что существует такая окрестность множества A вида $U_A(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varrho_A(x) < R\}$, $R > 0$, что для каждой точки $x \in U_A(R)$ существует единственная метрическая проекция $P_A x$ этой точки на множество A , причем функция $U_A(R) \ni x \rightarrow P_A x$ непрерывна. Здесь $\varrho_A(x)$ – функция расстояния от точки x до множества A . Впервые вероятно такие множества (гладкие поверхности) появились в работе Ю.Г. Решетняка [8]. После работ Ж.-Ф. Виалья [22], Т. Рокафеллара [21] и Ф. Кларка [11] возникло современное определение.

Определение 3. Замкнутое подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ проксимально гладкое (также говорят прокс-регулярное, слабо выпук-

лое), если функция $\varrho_A(x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_A(R)$. При этом $R > 0$ называется константой проксимальной гладкости множества A .

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ проксимально гладкое множество с константой R . Тогда для градиента функции расстояния известна формула [11]

$$\varrho'_A(x) = \frac{x - P_A x}{\varrho_A(x)} \quad \forall x \in U_A(R).$$

Поэтому метрическая проекция $P_A x$ любой точки $x \in U_A(R)$ на проксимально гладкое с константой R множество A существует, единственна и непрерывно зависит от x на $U_A(R)$. Более того, если выбирается $r \in (0, R)$, то для любых двух точек $x, y \in U_A(r)$ выполнено неравенство [11]

$$(7) \quad \|P_A x - P_A y\| \leq \frac{R}{R-r} \|x - y\|.$$

Еще одна важная характеристика проксимально гладкого множества – это опорный принцип [22]. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является проксимально гладким с константой $R > 0$ тогда и только тогда, когда для любой точки x из границы множества A и любого единичного вектора $p \in N(A, x)$, где $N(A, x)$ – любой нормальный конус (Кларка, нижний, верхний, Фреше и т.п. – для проксимально гладких множеств все они совпадают [14]) выполнено равенство

$$A \cap \text{int } B_R(x + Rp) = \emptyset.$$

Здесь через $B_R(a)$ обозначен замкнутый шар радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Неформально говоря, множество A является проксимально гладким с константой R , если по всей его границе можно катать без заклинивания шар радиуса R (рис. 2.3.1).

Все выпуклые замкнутые подмножества из \mathbb{R}^n являются проксимально гладкими с константой $R = +\infty$. Пример невыпуклого проксимально гладкого множества даёт единичная евклидова сфера $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ с $R = 1$.

Пример 3. Пусть множество S задано уравнением $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$, где $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть градиент g' удовлетворяет условию Липшица с константой L_1 и су-

существует число $m > 0$ такое, что $\forall x \in S$ выполнено неравенство $\|g'(x)\| \geq m$. В работе [22] доказано, что при этих условиях множество S проксимально гладкое с константой $R = \frac{m}{\tau}$.

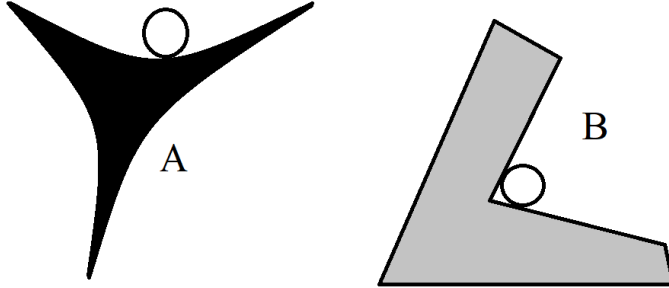


Рис. 2.3.1. Множество A – проксимально гладкое с константой R . Множество B не проксимально гладкое

Пусть δ_{ij} – символ Кронекера. Рассмотрим многообразие Штифеля

$$S_{n,k} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} \mid X^T X = I_k\}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

Введем скалярное произведение матриц $\langle X, Y \rangle = \text{tr } X^T Y$ и норму $\|X\|^2 = \text{tr } X^T X$. Пусть X_i – i -й столбец $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ и $\bar{x} = \bar{x}(X) = (X_1^T, \dots, X_i^T, \dots, X_k^T) \in \mathbb{R}^{nk}$. Будем говорить, что компоненты X_i^T стоят на i -м месте в векторе \bar{x} . Рассмотрим систему $g_{ij}(\bar{x}) = \langle X_i, X_j \rangle - \delta_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq j \leq k$, которая эквивалентна $X^T X = I_k$. Имеем

$$g'_{ii}(\bar{x}) = (0, \dots, 0, \underbrace{2X_i^T}_{i\text{-е место}}, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$g'_{ij}(\bar{x}) = (0, \dots, 0, \underbrace{X_j^T}_{i\text{-е место}}, 0, \dots, 0, \underbrace{X_i^T}_{j\text{-е место}}, 0, \dots, 0), \quad i < j.$$

Отметим, что для $X \in S_{n,k}$ $\|g'_{ii}(\bar{x})\| = 2$ и функция g'_{ii} липшицева с константой 2, то есть множество $\{g'_{ii}(\bar{x}) = 0\}$ проксимально

гладкое с $R = 1$. Если $i < j$, то $\|g'_{ij}(\bar{x})\| = \sqrt{2}$ и g'_{ij} липшицева с константой 1, то есть множество $\{g'_{ij}(\bar{x}) = 0\}$ проксимально гладкое с константой $R = \sqrt{2}$. Заметим также, что при $(i, j) \neq (i', j')$ для $X \in S_{n,k}$ вектор $g_{ij}(\bar{x})$ ортогонален вектору $g'_{i'j'}(\bar{x})$.

Допустим, пересечение l множеств вида $\{g_{ij}(\bar{x}) = 0\}$ есть проксимально гладкое множество с константой r_l . Тогда из опорного принципа пересечение с еще одним множеством такого вида (в силу ортогональности векторов g'_{ij}) удовлетворяет опорному принципу с константой $r_{l+1} = \frac{r_l R}{\sqrt{r_l^2 + R^2}}$, где $R = 1$, если $i = j$, и $R = \sqrt{2}$, если $i < j$. Отсюда получаем, что многообразие Штифеля проксимально гладкое с константой

$$R \geq \frac{2}{\sqrt{k^2 + 3k}} \bullet$$

Таким образом, аппроксимативные свойства проксимально гладкого множества такие же, что и у выпуклого множества: метрическая проекция точки на множество существует, единственна и непрерывна по Липшицу по точке. Только все эти условия выполняются не во всём пространстве, а в некоторой окрестности проксимально гладкого множества. Этого часто бывает достаточно для приложений.

В силу указанных аппроксимативных свойств проксимально гладких множеств, в первую очередь будут рассматриваться проекционные алгоритмы решения задач минимизации. Это метод проекции градиента для задачи (2) $x_0 \in A$,

$$x_{k+1} = P_A(x_k - t f'(x_k)), \quad t > 0,$$

а также метод Франк – Вульфа [4]. Кроме того, обсуждается задача поиска ближайших точек сильно выпуклого и проксимально гладкого множества методом альтернативных проекций.

Определение 4. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция и $A \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое подмножество. Будем говорить, что выполнено условие *Restricted Secant Inequality (RSI)* для функции f на множестве A , если существует число $\mu > 0$ такое, что для

всех $x \in A$ и любого $x_\Omega \in P_\Omega x$ (здесь как обычно $\Omega \subset A$ – множество минимумов f на множестве A) получаем неравенство

$$(f'(x) - f'(x_\Omega), x - x_\Omega) \geq \mu \|x - x_\Omega\|^2.$$

Последнее условие выполнено для сильно выпуклой с константой μ функции f [3] (f сильно выпукла с константой μ , если функция $f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ выпукла), а также для некоторых невыпуклых функций.

Приведем пример одного результата о сходимости метода проекции градиента.

Утверждение 4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – проксимально гладкое множество с константой $R > 0$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (RSI) на множестве A с константой $\mu > 0$ и имеет липшицев градиент с константой $L_1 > 0$, $m = \sup_{x \in A} \|f'(x)\|$. Предположим, что $\frac{m}{\mu} < R$.

Тогда для всякой начальной точки $x_0 \in A$ итерационный процесс

$$(8) \quad x_{k+1} = P_A(x_k - t f'(x_k)), \quad t = \frac{\mu - \frac{m}{R}}{L_1^2 - \frac{\mu m}{R}},$$

сходится к множеству Ω : $\varrho_\Omega(x_{k+1}) \leq \varrho_\Omega(x_k) \cdot q(t)$, где

$$q(t) = \frac{R}{R - tm} \sqrt{1 - 2t\mu + t^2 L_1^2} \in (0, 1).$$

Заметим, что $q(t) < 1$. Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.3 из [10], где функция f предполагалась сильно выпуклой с константой μ .

Заметим, что построенная последовательность $\{x_k\}$ сходится с линейной скоростью и для нее можно доказать оценку

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq q^k(t) (1 + q(t)) \varrho_\Omega(x_0).$$

Отметим также, что для сильно выпуклой функции с непрерывным по Липшицу градиентом также имеет место линейная скорость сходимости метода проекции градиента на выпуклом множестве [2, 4].

Приведем пример, который покажет, что соотношение $\frac{m}{\mu} < R$ между параметрами существенно для приведенного утверждения.

Пример 4. Рассмотрим в \mathbb{R}^2 функцию $f(x, y) = x^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ и множество $S = \{x^2 - y = 0\}$. Функция f – сильно выпукла с $\mu = 2$ и липшицева в окрестности начала координат с константой $m \geq 1$. Минимальный радиус кривизны параболы S достигается в точке $(0, 0)$ и равен $\frac{1}{2}$. Следовательно, S – проксимально гладкое множество с константой $R = \frac{1}{2}$. Таким образом, условие $\frac{m}{\mu} < R$ не выполнено.

Рассмотрим стартовую точку метода проекции градиента $a_0 = (\tau, \tau^2)$, $\tau > 0$. Рассмотрим две функции: $y_1 = x^2$ и $x^2 + (y_2 - \frac{1}{2})^2 = \tau^2 + (\tau^2 - \frac{1}{2})^2$. Тогда $y'_1 = y'_1(\tau) = 2\tau$,

$$2x + 2y'_2 \left(y_2 - \frac{1}{2} \right) = 0, \quad y'_2 = y'_2(\tau) = \frac{2\tau}{1 - 2\tau^2}.$$

Имеем

$$y'_2 - y'_1 \sim 4\tau^3, \quad \tau \rightarrow +0.$$

Последнее означает, что угол φ между касательными к графикам $y = y_1$ и $y = y_2$ в точке (τ, τ^2) равен $\varphi \sim 4\tau^3$, $\tau \rightarrow +0$. Пусть n_0 – единичная нормаль к параболе $y = x^2$ в точке a_0 со свойством $(n_0, e_2) > 0$, $e_2 = (0, 1)$. Следовательно, для точки

$$a_1 = P_S(a_0 - t f'(a_0))$$

получаем (для достаточно малого $t > 0$) $\rho_S(a_1) \leq t \|f'(a_0)\| < \frac{1}{4}$, и используя (7) получаем

$$\|a_0 - a_1\| \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \|a_0 + t n_0 - (a_0 - t f'(a_0))\| = 2t \|n_0 - (-f'(a_0))\| \sim 8t\tau^3$$

при $\tau \rightarrow +0$. Таким образом, на k -м шаге точка a_k имеет абсциссу больше чем τ_k , где $\tau_0 = \tau$,

$$\tau_k = \tau_{k-1} - C\tau_{k-1}^3$$

и $C = 8t$. Последняя последовательность имеет асимптотику $\tau_k \asymp \frac{1}{\sqrt{k}}$ [4, глава 2, лемма 6]. Линейная скорость сходимости потеряна. ●

В приведенном выше утверждении обсуждалась задача (2) с проксимально гладким множеством, но функция удовлетворяла условию (RSI), которое достаточно близко к выпуклости.

Однако можно рассматривать невыпуклую функцию на выпуклом множестве. Сформулируем некоторый вариант метода Франк – Вульфа.

Пусть ∂A – граница множества A .

Утверждение 5. Пусть множество $A = \bigcap_{x \in X} B_r(x)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное подмножество (единственное ограничение на X – это $A \neq \emptyset$) и $r > 0$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет липшицев градиент на множестве A с константой $L_1 > 0$, $m = \inf_{x \in \partial A} \|f'(x)\| > 0$ и $r < \frac{m}{L_1}$. Тогда итерации $x_0 \in \partial A$,

$$x_{k+1} = \arg \max_{x \in A} (f'(x_k), x) \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

сходятся к единственному решению x_Ω с линейной скоростью

$$\|x_{k+1} - x_\Omega\| \leq \frac{rL_1}{m} \|x_k - x_\Omega\|.$$

Заметим, что лебеговы множества функции f – проксимально гладкие с константой $R = \frac{m}{L_1} > r$.

Доказательство утверждения 5 для множества A , являющегося шаром, содержится в [6], для произвольного сильно выпуклого множества A – в [9].

Приведенные результаты (особенно последний) показывают, что проксимально гладкое множество с константой R эффективно рассматривать в паре со множеством, которое является пересечением замкнутых шаров радиуса $r < R$. Такие множества – пересечения шаров принято называть *сильно выпуклыми с радиусом r* .

Большое количество свойств сильно выпуклых множеств и проксимально гладких множеств содержится в обзорной статье [14]. Например, другая характеристика сильно выпуклых множеств состоит в том, что выпуклое компактное множество B сильно выпукло с радиусом r тогда и только тогда, когда для любых точек $x, y \in B$ шар с центром в точке $\frac{1}{2}(x + y)$ радиуса $\frac{1}{8r} \|x - y\|^2$ содержится в B .

Если множество B сильно выпукло с радиусом r , а точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ выбраны на расстоянии не менее $d > 0$ от множества B , то $\|P_B x - P_B y\| \leq \frac{r}{r+d} \|x - y\|$. Последнее свойство характеризует сильно выпуклые множества в том смысле, что если для выпуклого замкнутого множества B существует такая константа $C \in (0, 1)$, что для любой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ на расстоянии не менее $d > 0$ от множества B метрические проекции точек x, y удовлетворяют условию $\|P_B x - P_B y\| \leq C \|x - y\|$, то множество B есть пересечение замкнутых шаров радиуса r , где r определяется из соотношения $C = \frac{r}{r+d}$.

Это свойство сильно выпуклых множеств совместно с формулой (7) позволяют получить следующий результат об *альтернативных проекциях*.

Утверждение 6. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – проксимально гладкое множество с константой $R > 0$, $B \subset \mathbb{R}^n$ – сильно выпуклое множество с радиусом r . Предположим, что $d = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\| > 0$ и $r + d < R$. Пусть $d \leq D < R \frac{d}{r+d}$. Тогда для любой точки $a_0 \in A$ со свойством $\varrho_B(a_0) \leq D$ рекуррентная последовательность $b_k = P_B a_k$, $a_{k+1} = P_A b_k$, $k = 0, 1, \dots$ (а также для любой точки $b_0 \in B$ со свойством $\varrho_A(b_0) \leq D$ рекуррентная последовательность $a_k = P_A b_k$, $b_{k+1} = P_B a_k$, $k = 0, 1, \dots$) сходится к точкам $a \in A$ и $b \in B$, $\|a - b\| = d$, со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|a_{k+1} - a_k\| \leq \frac{R}{R-D} \frac{r}{r+d} \|a_k - a_{k-1}\|, \quad k \geq 1,$$

$$\|b_{k+1} - b_k\| \leq \frac{R}{R-D} \frac{r}{r+d} \|b_k - b_{k-1}\|, \quad k \geq 1.$$

Результат этого утверждения верен также в вещественном гильбертовом пространстве.

Отметим, что при условии $D < R \frac{d}{r+d}$ выполнено неравенство

$$\frac{R}{R-D} \frac{r}{r+d} < 1.$$

Проиллюстрируем утверждение 6. Напомним, что суммой Минковского двух подмножеств A, B линейного пространства

называется множество $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Геометрической разностью множеств A, B называется множество $A \overset{*}{-} B = \{x \mid x + B \subset A\}$. Отметим, что операции суммы и разности множеств не являются в общем случае взаимно обратными. Для выпуклых компактных множеств A, B выполнено равенство $(A+B) \overset{*}{-} B = A$. Однако имеет место лишь включение $(A \overset{*}{-} B) + B \subset A$, а равенство верно не всегда.

Пример 5. Пусть множество A – телесное и проксимально гладкое с константой R , причем $(A \overset{*}{-} B_R(0)) + B_R(0) = A$. Последнее означает, что по границе множества A можно прокатить шарик радиуса R , причем шарик будет оставаться внутри множества A . Иными словами, и само множество A , и замыкание его дополнения проксимально гладкие с константой R . Пусть множество B – сильно выпуклое с радиусом r , $r < R$, и $\{x_0\} = A \cap B$. Покажем, что существует итерационный алгоритм, который позволяет найти точку x_0 с линейной скоростью.

Выберем $d \in (0, \frac{1}{2}(R - r))$. Определим множество $A_1 = A \overset{*}{-} B_d(0)$. Пусть $p(x)$ – единичный нормальный вектор к A в точке $x \in \partial A$.

Из равенства $(A \overset{*}{-} B_d(0)) + B_d(0) = A$ следует, что точки $a = x_0 - d \cdot p(x_0) \in A_1$ и $b = x_0 \in B$ будут ближайшими точками множеств A_1 и B . Кроме того, множество A_1 – проксимально гладкое с константой $R-d$. Это легко вытекает из опорного принципа для проксимально гладких множеств.

Пусть $d \leq D \leq \frac{R-d}{r+d}d$. Тогда для любой точки $a_0 \in A_1$, $\rho_B(a_0) < D$, итерации $b_k = P_B a_k$, $a_{k+1} = P_A b_k$, $k = 0, 1, \dots$, в силу утверждения 6 сходятся с линейной скоростью: $a_k \rightarrow a$, $b_k \rightarrow b = x_0$.

Заметим, что граница множества A_1 строится по границе множества A по формуле

$$\partial A_1 = \{x - d \cdot p(x) \mid x \in \partial A\} \bullet$$

В случае если пересечение $A \cap B$ многоточечно, для поиска общей точки множеств уместно воспользоваться условием *трансверсальности множеств*, см. [15, §8.5]. Отметим, что в рассмотренном примере множества A и B не трансверсальны.

5. Условие ограничения ошибки и дальнейшие обобщения

Рассмотрим задачу (2), в которой как множество, так и функция не являются сильно выпуклыми и оба могут быть невыпуклыми. В данном разделе обсуждается, при каких достаточных условиях метод проекции градиента для задачи (2) сходится к решению задачи.

Через $(x)_+$ обозначим положительную срезку вектора $x \in \mathbb{R}^n$, то есть $((x)_+)_i = x_i$, если $x_i > 0$, и $((x)_+)_i = 0$, если $x_i \leq 0$.

Напомним, что для множества A , задаваемого системой линейных неравенств $A = \{x \mid Mx \leq b\}$, $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, справедливо неравенство Хоффмана:

$$\varrho_A(x) \leq C(M) \|(Mx - b)_+\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где положительная константа $C(M)$ зависит только от матрицы M и может быть оценена, например, с помощью теории двойственности. По сути, это один из вариантов условия ограничения ошибки (ЕВ).

В работе [18] для задачи вида

$$\min f(x), \quad x \in A = \{x \mid g(x) \leq 0\}, \quad g(x) = (g_1(x), \dots, g_N(x)),$$

с множеством решений Ω для дифференцируемых функций специального вида f и g_i , причем все функции g_i выпуклы, получена оценка ограничения ошибки вида

$$(9) \quad \varrho_\Omega(x) \leq c \|x - P_A(x - f'(x))\|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| \leq \rho, \quad \alpha > 0.$$

На основании этого в [18] доказывается, что метод проекции градиента для такой задачи сходится с линейной скоростью при $\alpha = 1$ и с сублинейной скоростью при $\alpha \in (0, 1)$. К сожалению, содержательной оценки для констант c и в особенности α в работе [18] не содержится.

Определение 5. Будем говорить, что для функции f на непрерывно дифференцируемой поверхности A выполняется условие Поляка – Лоясевича (PL), если существует $\beta \in \mathbb{R}$ и такое $\mu > 0$,

что для всякой точки $x \in A \cap \{x \mid f(x) \leq \beta\}$ выполнено неравенство

$$\|P_{T_x} f'(x)\|^2 \geq \mu(f(x) - f_*),$$

здесь T_x – касательное подпространство к A в точке $x \in A$, $f_* = f(\Omega)$, Ω – непустое множество решений задачи (2).

Если на поверхности A для функции f выполнено условие (PL) и поверхность также является проксимально гладким множеством с константой R , то, повторяя рассуждения утверждений 1 и 2, можно доказать, что метод проекции градиента сходится к решению с линейной скоростью как по точке, так и по функции. Для метода проекции градиента имеет место оценка

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \|P_{T_{x_k}} f'(x_k)\|^2 \cdot q(t), \quad q(t) = t - Const \cdot t^2,$$

где $Const$ зависит от параметров задачи (констант Липшица L , L_1 функции и градиента, R и т.д.). При малых $t < \frac{R}{2L}$ выполнено включение $q(t) \in (0, 1)$ и функция $\varphi(x) = f(x) - f(\Omega)$ удовлетворяет оценке

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x_k)(1 - q(t)).$$

Таким образом, получаем линейную скорость сходимости алгоритма.

Представим результаты о сходимости градиентных методов в виде таблиц 2.3.1 и 2.3.2. Всюду ниже градиент f' функции f предполагается липшицевым.

Таблица 2.3.1. Задача (1)

Функция f	Что использовать
Сильно выпуклая	(5) сходится с линейной скоростью [2, 4]
Выпуклая	$f(x_k)$ для x_k из (5) сходится со скоростью $O(\frac{1}{k})$ [2, 4]
Невыпуклая	Требовать от f выполнение условия (EB) или (PL), оно гарантирует сходимость (5) с линейной скоростью

Если позволяет гладкость функции, то завершать итерации методом Ньютона.

Таблица 2.3.2. Задача (2). Обсудим только случаи, когда либо функция, либо множество невыпуклые

Функция f	Множество A	Что использовать
Сильно выпуклая с $\mu > 0$	Проксимально гладкое с $R > 0$	$\frac{m}{\mu} < R$, Утверждение 4
Липшицев градиент с $L_1 > 0$	Сильно выпуклое с $r > 0$	$r < \frac{m}{L_1}$, Утверждение 5
Невыпуклая	Проксимально гладкое с $R > 0$	Множество A есть C^1 -поверхность с условием (PL) или выполняется условие типа (ЕВ) (9). Это даст сходимость метода проекции градиента с линейной скоростью

6. Заключение

Мы рассмотрели лишь одно направление в невыпуклой оптимизации. Отметим, что существуют и другие подходы к решению невыпуклых задач. Упомянем о двух из них.

Во-первых, это метод *выпуклой релаксации* (*convex relaxation*). Основная идея метода состоит в том, что вместо задачи (2) с невыпуклой функцией f и множеством A рассматривается задача

$$\min_{x \in \tilde{A}} \tilde{f}(x)$$

с выпуклой функцией \tilde{f} и выпуклым множеством \tilde{A} . Например, если $\tilde{f}(x) \leq f(x)$ и $A \subset \tilde{A}$, а также (в некотором смысле) $\tilde{f}(x) \approx f(x)$ и $\tilde{A} \approx A$, то можно найти (иногда очень точную) оценку снизу для решения задачи (2), решая выпуклую задачу с \tilde{f} и \tilde{A} . Способы построения выпуклых релаксационных задач зачастую эвристические.

Собственно, попытка применить эвристические методы и составляет другой возможный подход к решению невыпуклой задачи. Читатель может найти подробности в монографии [23].

Автор признателен Б.Т. Поляку за ценное обсуждение содержания раздела.

Литература

1. ИВАНОВ Г.Е. *Слабо выпуклые множества и функции*. – М.: Физматлит, 2006. – 351 с.
2. НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию*. – М.: МЦНМО, 2010. – 278 с.
3. ПОЛОВИНИКИН Е.С., БАЛАШОВ М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007. – 440 с.
4. ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию*. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. ПОЛЯК Б.Т. *Градиентные методы минимизации функционалов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1963. – Т. 3, №4. – С. 643–653.
6. ПОЛЯК Б.Т. *Локальное программирование* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, №9. – С. 1324–1331.
7. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
8. РЕШЕТНЯК Ю.Г. *Об одном обобщении выпуклых поверхностей* // Матем. сб. – 1956. – Т. 40(82), №3. – С. 381–398.
9. BALASHOV M.V. *Maximization of a Function with Lipschitz Continuous Gradient* // J. of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 209, No. 1. – P. 12–18.
10. BALASHOV M.V. *About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set* // J. Convex Anal. – 2017. – Vol. 24, No. 2 – P. 493–500.
11. CLARKE F.H., STERN R.J., WOLENSKI P.R. *Proximal Smoothness and Lower- C^2 Property* // J. Convex Anal. – 1995. – Vol. 2, No. 1-2. – P. 117–144.
12. DRUSVYATSKIY D., LEWIS A.S. *Error Bounds, Quadratic Growth, and Linear Convergence of Proximal Methods* // arXiv:1602.06661v2. – 2016.
13. EDELMAN A., ARIAS T.A., SMITH S.T. *The Geometry of Algorithms with Orthogonality Constraints* // Siam J. Matrix Anal. Appl. – 1998. – Vol. 20, No. 2. – P. 303–353

14. GONCHAROV V.V., IVANOV G.E. *Strong and Weak Convexity of Closed Sets in a Hilbert Space* // In: Operations Research, Engineering, and Cyber Security / Daras N., Rassias T. (eds). – Springer Optimization and Its Applications. – Springer, Cham., 2017. – Vol. 113. – P. 259–297.
15. IOFFE A.D. *Metric Regularity. Theory and Applications – A Survey* // arXiv:1505.07920v2. – 2015.
16. KARIMI H., NUTINI J., SCHMIDT M. *Linear Convergence of Gradient and Proximal-Gradient Methods Under the Polyak-Lojasiewicz Condition* // In: Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases / Frasconi P., Landwehr N., Manco G., Vreeken J. (eds). – ECML PKDD, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham. – 2016. – Vol. 9851.
17. LOJASIEWICZ S. *A Topological Property of Real Analytic Subsets (in French)* // Coll. du CNRS, Les equations aux derivees partielles. – 1963. – Vol. 117. – P. 87–89.
18. LUO ZH.-Q. *New Error Bounds and Their Applications to Convergence Analysis of Iterative Algorithms* // Math. Program. Ser. B. – 2000. – Vol. 88. – P. 341–355.
19. NESTEROV Y. *Efficiency of Coordinate Descent Methods on Huge-Scale Optimization Problems* // SIAM J. Optim. – 2012. – P. 341–362.
20. NESTEROV Y., POLYAK B.T. *Cubic Regularization of Newton Method and its Global Performance* // Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 108, No. 1. – P. 177–205.
21. POLIQUIN R.A., ROCKAFELLAR R.T., THIBAUT L. *Local Differentiability of Distance Functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 353. – P. 5231–5249.
22. VIAL J.-PH. *Strong and Weak Convexity of Sets and Functions* // Mathematics of Operations Research. – 1983. – Vol. 8, No. 2. – P. 231–259.
23. PARDOLOS P.M., ROMEIJN H.E (EDS.) *Handbook of Global Optimization. Volume 2* // Nonconvex optimization and its applications. – Springer Science + Business Media Dordrecht, 2002. – 569 p.

ГЛАВА 3. РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬ И СЕТИ

3.1. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Кушнер А.Г.¹

1. Введение

В настоящем разделе рассматриваются задачи управления системами, поведение которых описывается *дифференциальными уравнениями в частных производных*. Управление в таких системах существенно отличается от управления в системах, описываемых *обыкновенными дифференциальными уравнениями*. В первую очередь это связано с тем, что управляющие воздействия могут быть распределены в пространстве и времени, а также входить как в сами уравнения, так и в граничные условия.

Ниже рассмотрены различные типы управления такими системами: управление граничными условиями, подвижное управление, управление с помощью точечных воздействий, распределённое управление. Приведены примеры управления колебаниями, нагревом, распространением ограниченного звукового пучка, управления фильтрационными потоками, а также управления разработкой нефтяных месторождений.

Предполагается знакомство читателя с базовыми сведениями о линейных уравнениях математической физики (см., например, [10, 23]).

¹ Алексей Гурьевич Кушнер, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.ф.-м.н. (kushner@physics.msu.ru).

2. Системы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных

Рассмотрим систему, состояние которой описывается набором параметров. Эти параметры могут быть как числовыми, так и функциональными.

Множество M называется *конфигурационным пространством* системы, если существует взаимно однозначное соответствие между ним и множеством всевозможных конфигураций системы.

Конфигурационным пространством системы, состоящей из n точек в трехмерном пространстве, на которые не наложены никакие связи, является арифметическое пространство \mathbb{R}^{3n} .

Конфигурационным пространством плоского маятника является окружность S^1 , а конфигурационным пространством двойного плоского маятника – прямое произведение окружностей $S^1 \times S^1$, то есть тор.

Если конфигурационное пространство конечномерно, то есть для описания геометрии системы достаточно использовать конечное число параметров (координат), то такая система называется *конечномерной*, или системой с *сосредоточенными параметрами*, а число этих параметров называется *размерностью* системы.

Если важны не только геометрические, но и кинематические характеристики механической системы, то вместо конфигурационного пространства следует рассматривать *фазовое пространство*, точкам которого отвечают как положения, так и импульсы. Например, в ньютоновской механике фазовое пространство системы, состоящей из n точек (см. пример выше) – это пространство \mathbb{R}^{6n} , а фазовое пространство плоского маятника – цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. Размерность фазового пространства конечномерной системы в два раза больше размерности конфигурационного пространства.

Поведение конечномерной системы, то есть её эволюция во времени, описывается обыкновенными *дифференциальными уравнениями*, которые обычно следуют из физических законов.

3.1. Системы с распределенными параметрами

Для механических систем это, например, второй закон Ньютона, устанавливающий связь между ускорением тела и действующими на него силами. Поэтому дифференциальные уравнения таких систем включают в себя производные второго порядка по времени от координат точек.

Гораздо сложнее обстоит дело для систем, конфигурационное пространство которых не является конечномерным. Например, таковыми являются конфигурационные пространства струны, мембраны или стержня: для описания их геометрической конфигурации нужно использовать не набор чисел, а набор функций. Такие системы называются *системами с распределёнными параметрами*. Приведем простейшие примеры.

Положение однородной струны, натянутой между двумя точками оси X в плоскости OXY , описывается функцией $y = u(x)$, указывающей её отклонение от положения равновесия. Если нас интересует не просто изгиб струны под действием приложенных к ней сил, а эволюция её формы во времени, то к аргументу x функции u следует добавить время t : $y = u(x, t)$. Как известно (см., например, [23]), малые колебания однородной струны описываются *дифференциальным уравнением в частных производных* второго порядка вида

$$(1) \quad u_{tt} - u_{xx} = 0$$

(*волновым уравнением*). К уравнению (1) необходимо добавить *краевые условия*, показывающие каким образом струна закреплена на концах, а также *начальные условия*, задающие начальную форму и начальное распределение скоростей точек струны.

Поперечные колебания балки описываются дифференциальным уравнением уже четвёртого порядка [23]:

$$(2) \quad u_{tt} - \omega^2 u_{xxxx} = 0,$$

а распространение волн на мелководье – дифференциальным *уравнением Кортевега – де Вриза* (Korteweg – de Vries), которое имеет третий порядок:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Более сложные примеры возникают в гидродинамике (уравнения Навье – Стокса), теориях упругости, вязкопластичности, фильтрации, теплопроводности и т.п.

Уравнения, описывающие системы с распределёнными параметрами, как правило, являются уравнениями в частных производных, хотя встречаются и интегро-дифференциальные уравнения, и уравнения с отклоняющимися аргументами, например, с запаздыванием.

Данный раздел ограничен рассмотрением только уравнений в частных производных.

В настоящее время хорошо развита теория линейных уравнений в частных производных и в основном такие уравнения будут рассматриваться ниже.

Системами с распределёнными параметрами можно *управлять*, прикладывая воздействие к её точкам и/или параметрам. При этом управление может быть *распределённым* – применённым ко всем точкам системы, либо *сосредоточенным*, то есть применённым только к некоторым её точкам, например, к граничным.

Теория управления системами с распределёнными параметрами разработана значительно меньше, чем теория управления системами с сосредоточенными параметрами.

Первые результаты в этой области получены, по-видимому, А.Г. Бутковским и А.Я. Лернером [5], которые рассмотрели задачи оптимального управления системами с распределёнными параметрами, описываемыми системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, а также А.И. Егоровым, который рассмотрел управление системой, описываемой уравнением теплопроводности [11, 12]. Дальнейшее развитие теория получила в работах А.Г. Бутковского [6–9], Ж.Л. Лионса [18], применившего методы функционального анализа, К.А. Лурье [19], Э.Я. Рапопорта [20], А.В. Фурсикова [24] и др. Подробный обзор результатов по управлению колебаниями в системах с распределёнными параметрами приведён в монографии [13].

Рассмотрим основные способы управления системами с распределёнными параметрами.

3. Управление с помощью граничных условий

Приведем примеры управления граничными условиями.

Пример 1. *Управление колебаниями струны с помощью изменения граничных условий.* Рассмотрим колебания струны, описываемые уравнением (1). Допустим, что оба конца струны, находящиеся в точках с координатами $x = 0$ и $x = 1$, можно перемещать в направлении, параллельном оси OY по закону:

$$(3) \quad u(t, 0) = \mu(t), \quad u(t, 1) = \nu(t).$$

Функции μ и ν выступают в качестве управляющих параметров.

Целью такого управления может быть успокоение колебаний (если начальные условия таковы, что струна колеблется) или наоборот – увеличение их амплитуды.

В качестве примера рассмотрим задачу успокоения колебаний струны за время $T > 0$ при следующих начальных условиях:

$$(4) \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x),$$

где функции φ и ψ определены на отрезке $[0, 1]$. Начальные и граничные условия должны быть согласованы:

$$\begin{aligned} \nu(0) = \varphi(1) = 0, \quad \mu(0) = \varphi(0) = 0, \\ \nu'(0) = \psi(1) = 0, \quad \mu'(0) = \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Используем метод, основанный на явном представлении решения начально-краевой задачи (3), (4), которое следует из формулы Даламбера [10 23]. Для построения этого представления продолжим функции φ и ψ на всю вещественную ось следующим образом. Сначала продолжим их на отрезки $[-1, 0]$ и $[1, 2]$ соответственно нечётным образом, а затем построим их периодические продолжения с периодом 2 на всю вещественную ось. В результате получим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$. Будем считать, что эти функции дважды дифференцируемы в каждой точке. Определим функции

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{при } 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{при } t \leq 0; \end{cases} \quad \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при } 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

Решение начально-краевой задачи (3), (4) для значений времени $0 \leq t \leq 1$ имеет вид:

$$(5) \quad u(t, x) = \frac{\Phi(x+t) + \Phi(x-t)}{2} + \int_{x-t}^{x+t} \Psi(\tau) d\tau + \\ + \tilde{v}(t-1+x) + \tilde{\mu}(t-x).$$

Перейдём к поиску управлений $v(t)$ и $\mu(t)$, успокаивающих колебания струны за время $T = 1$. В момент $T = 1$ должны выполняться условия

$$(6) \quad u(1, x) = 0, \quad u_t(1, x) = 0.$$

Продифференцировав каждое из уравнений (6) по x , получим систему двух дифференциальных уравнений относительно функций $v(t)$ и $\mu(t)$, решая которые находим вид управляющих функций:

$$v(t) = \frac{1}{2} \varphi(1-t) + \frac{1}{2} \int_{1-t}^1 \psi(\tau) d\tau, \quad \mu(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(\tau) d\tau.$$

Различные варианты оптимальных управлений граничными условиями для колебаний однородной струны и балки, продольные колебания которой описываются уравнением (2), приведены в работе [13].

При управлении вида (3) естественно рассматривать также задачу минимизации интеграла граничной энергии, который имеет вид

$$\int_0^T ((\dot{v}(t))^2 + (\dot{\mu}(t))^2) dt,$$

где T – время процесса колебаний ($0 \leq t \leq T$). Задачи подобного рода рассмотрены в работе [14]. •

Пример 2. Управление фокусировкой звукового пучка, распространяющегося в нелинейной среде. Распространение ограниченного трехмерного звукового пучка в нелинейной среде без диссипации описывается уравнением Хохлова – Заболоцкой [21], которое в безразмерной форме имеет вид

3.1. Системы с распределенными параметрами

$$(7) \quad u_{ix} = uu_{tt} + u_t^2 + u_{yy} + u_{zz}.$$

Предполагается, что пучок распространяется в направлении оси OX , t – масштабированное время, а оси OY и OZ перпендикулярны друг другу и оси OX . Здесь u – отклонение плотности среды от равновесной. В работе [29] была показана возможность управления фокусировкой звукового пучка. А именно, изменяя радиус пучка вблизи источника звука по определенному закону, можно добиться фокусировки звукового пучка на заданном расстоянии от генератора (см. рис. 3.1.1).

Отметим, что уравнение (7) является нелинейным. В этой ситуации эффективными являются методы геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [22, 28], где для управления фокусировкой звукового пучка использованы симметрии и законы сохранения уравнения Хохлова – Заболоцкой).

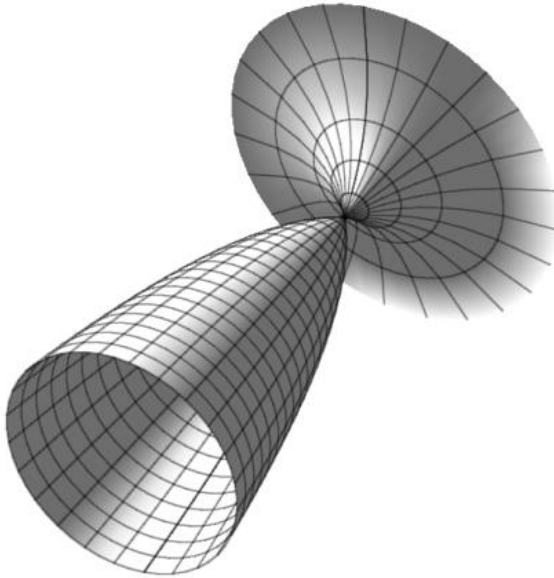


Рис. 3.1.1. Фокусировка звукового пучка •

4. Подвижное управление

При обработке материалов часто используются электронно-лучевые и ионно-лучевые вакуумные установки, в которых обрабатываемый материал нагревается под действием излучения подвижных источников электронных, ионных или лазерных лучей.

Это приводит к необходимости рассматривать другой тип управления в системах с распределенными параметрами, когда управляющее воздействие является *подвижным*, то есть когда место его приложения к точкам системы зависит от времени. Источник воздействия может перемещаться непрерывно или дискретно, причём его интенсивность и форма также могут меняться.

Если источник *точечный*, то для его описания можно использовать дельта-функцию Дирака $\delta(x)$. Например, если источник тепла перемещается вдоль одномерного объекта по закону $x = s(t)$, то уравнение теплопроводности имеет вид

$$(8) \quad u_t = a^2 u_{xx} + w \delta(x - s(t)),$$

где $u = u(t, x)$ – температура стержня в точке x в момент времени t , a^2 – коэффициент температуропроводности материала, w – параметр, характеризующий интенсивность (мощность) нагрева. Скорость перемещения источника равна $\dot{s}(t)$. В этом случае решения уравнения (8) ищут в классе обобщенных функций Соболева.

На практике наиболее распространено нормальное распределение интенсивности источника:

$$(9) \quad W(z) = \frac{w}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $z = x - s(t)$, σ^2 – дисперсия, $s(t)$ – координата центра источника. Тогда вместо уравнения (8) следует рассматривать уравнение

$$(10) \quad u_t = a^2 u_{xx} + W(x - s(t)).$$

Легко заметить, что если дисперсия σ^2 стремится к нулю, то при $w = 1$ распределение (9) стремится к дельта-функции $\delta(x - s)$.

3.1. Системы с распределенными параметрами

Если источников несколько, то при составлении дифференциального уравнения их интенсивности нужно суммировать². Например, если вдоль одномерного объекта перемещаются несколько источников тепла, движущихся по законам $x = s_1(t), \dots, x = s_n(t)$ с интенсивностями W_1, \dots, W_n соответственно, то вместо уравнения (10) нужно рассматривать уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{(i=1)}^n W_i(x - s_i(t)).$$

Уравнение (10) можно записать в другом виде. Введем новую систему координат, жестко связанную с источником: $y = x - s(t)$. Тогда уравнение примет вид

$$(11) \quad u_t = a^2 u_{yy} + \dot{s}(t)u_y + w\delta(y).$$

Остановимся на некоторых особенностях, характерных именно для систем с подвижным управлением. Для простоты ограничимся уравнением (10).

Оно получено на основе *закона Фурье*, который не учитывает инерционности процесса теплопроводности. Это означает, что изменение температуры в какой-то точке влечет за собой мгновенное её изменение в остальных точках.

Согласно закону Фурье, плотность теплового потока q пропорциональна градиенту температуры:

$$(12) \quad q = -ku_x,$$

где k – коэффициент удельной теплопроводности. Минус в правой части показывает, что тепловой поток направлен в сторону скорейшего убывания температуры.

Однако закон Фурье неприменим для описания быстропротекающих процессов, в частности при очень большой скорости движения источника. В этом случае вместо закона Фурье используем его модификацию с релаксационным членом, предложенную Каттанео [27]:

$$(13) \quad q = -ku_x - \tau \dot{q},$$

где τ – малый положительный параметр (время релаксации), \dot{q} – производная q по времени t .

² Здесь идёт речь о линейных уравнениях.

Поправка τq_t становится существенной, когда скорость изменения величины q велика, и именно такая ситуация возникает при быстром перемещении источника.

Выведем уравнение теплопроводности, основанное на формуле (13) вместо формулы (12).

Согласно закону сохранения энергии, скорость изменения количества тепла в заданном объёме равна сумме количества тепла, поступающего из внешних источников и тепла, приобретенного через боковую поверхность.

Математическим выражением этого закона является уравнение баланса в дифференциальной форме:

$$(14) \quad C u_t = W - q_x,$$

где C – объёмная теплоёмкость материала стержня, W – объёмная плотность источников.

Дифференцируя уравнение (13) по x , а уравнение (14) – по t , получим:

$$q_x = -k u_{xx} - \tau q_{tx}, \quad C u_{tt} = \frac{dW}{dt} - q_{tx}.$$

Исключив из полученных выражений производные q_{xx} и q_{tx} , получим:

$$(15) \quad u_t = a^2 u_{xx} - \tau u_{tt} + \frac{\tau}{C} \frac{dW}{dt} + \frac{1}{C} W,$$

где $a^2 = \frac{k}{c}$ – коэффициент температуропроводности материала.

Таким образом, вместо параболического уравнения (10) получено гиперболическое уравнение. Это, в частности, открывает возможности применения методов оптимального управления колебаниями, развитыми в монографии [15].

Формуле (15) можно придать вид, сходный с уравнением колебаний. Для этого введём обозначение

$$\omega^2 = \frac{a^2}{\tau}.$$

Уравнение (15) примет вид

$$u_{tt} - \omega^2 u_{xx} - \frac{1}{\tau} u_t - \frac{1}{C} \frac{dW}{dt} - \frac{1}{\tau C} W = 0,$$

или

$$(16) \quad u_{tt} - \omega^2 u_{xx} - \frac{1}{\tau} u_t + \frac{1}{C} \dot{s}(t)W'(x - s(t)) - \frac{1}{\tau C} W = 0.$$

Из уравнения (16) видно, что скорость распространения тепловых волн равна ω .

Рассуждения, приведённые выше, легко переносятся на случай двух и трёх пространственных переменных, а также и на задачи массопереноса, фильтрации и диффузии.

Отметим, что при большой скорости перемещения источника следует использовать формулу (15). При этом могут возникать явления, типичные для колебательных процессов.

По-видимому, впервые задачи подвижного управления были рассмотрены в работе [8]. Подробное описание методов подвижного управления можно найти в монографиях [9, 16].

Приведём примеры практического использования подвижного управления.

Пример 3. Подвижное управление колебаниями. Цели управления колебаниями могут быть различны. Это, например, гашение колебаний крыльев самолётов, или наоборот – увеличение энергии колебаний в акустических или электромагнитных генераторах. В примере 1 уже была рассмотрена подобная задача – управление колебаниями струны, где роли управляющих параметров играли граничные условия.

Однако точка приложения управляющего воздействия может быть любой, в том числе она может перемещаться вдоль струны непрерывно или дискретно. В этом случае приходим к задаче подвижного управления, и вместо уравнения (1) нужно рассматривать уравнение

$$(17) \quad u_{tt} - u_{xx} + W(x - s(t)) = 0.$$

где $s(t)$ – закон перемещения управляющего воздействия вдоль струны.

Рассмотрим задачу раскочки колебаний струны, которая закреплена на концах $x = 0$ и $x = 1$, то есть вместо граничных условий (3) выполнены условия

$$(18) \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0.$$

Начальные условия (4) оставим без изменений. Будем искать управление, при котором в каждый момент времени достигается наибольшее значение скорости возрастания энергии струны.

Интеграл энергии струны в момент времени t имеет вид

$$J^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2 + u_x^2) dx.$$

Этот интеграл можно представить в виде (см. [10])

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t d\tau \int_0^1 W(x - s(\tau)) u_\tau dx,$$

где

$$J^2(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi^2(x) + (\psi'(x))^2) dx$$

– значение интеграла энергии в начальный момент времени. Поэтому его производная равна

$$\frac{d}{dt} J^2(t) = \int_0^1 W(x - s(t)) u_\tau dx.$$

Таким образом, нужно искать такое управление, чтобы эта производная в каждый момент времени была максимальной. При заданной функции W эта задача сводится к определению закона перемещения управляющего воздействия $s(t)$ (см. [15]).

Аналогично можно решить задачу гашения колебаний. В этом случае нужно искать управление, доставляющее наименьшее значение скорости возрастания энергии струны. •

Пример 4. Плавление металла. Для плавления металлических слитков часто используются электронно-лучевые установки. Металлический слиток помещается в охлаждаемый кристаллизатор, над которым находится электронная пушка, генерирующая ограниченный пучок электронов большой мощности. Управляя этим лучом, можно добиться требуемого нагрева слитка и расплава.

Так как слиток трёхмерный, а лучом нагревается его поверхность, то подвижное управление входит не в само уравне-

ние, а в граничные условия. В этом смысле задачи подвижного управления становятся задачами управления граничными условиями, рассмотренными в разделе 3.

Примеры подвижного управления в задачах термической обработки металла приведены в монографии [16]. •

5. Управление с помощью точечных воздействий

Управление с помощью точечных воздействий близко к управлению граничными условиями: точки приложения управляющих воздействий расположены дискретно, они неподвижны, но находятся не на границе объекта управления, а внутри него. Воздействие может быть как непрерывным, так и импульсным.

Пример 5. *Управление фильтрацией в упругих пористых средах.* Пусть D – односвязная область плоскости, моделирующая упруго деформируемую однородную пористую среду, внутри которой находится слабосжимаемый флюид (газ или жидкость). Границу ∂D этой области будем считать гладкой и непроницаемой для флюида.

Фильтрация флюида описывается уравнением пьезопроводности для давления p (см. [4])

$$(19) \quad p_t = k(p_{xx} + p_{yy}),$$

где x, y – декартовы координаты точек в области D , k – коэффициент пьезопроводности. Перенормировкой времени $t \rightarrow \kappa t$ можно добиться равенства коэффициента κ единице.

Допустим, что в точках $a^i = (a_x^i, a_y^i)$, $(i = 1, \dots, m)$ области D находятся скважины, на которых поддерживаются заданные режимы давления. Например, осуществляется закачка или отбор флюида. В этом случае эволюция давления описывается уравнением

$$(20) \quad p_t = p_{xx} + p_{yy} + \sum_{i=1}^m c_i(t) \delta_{a^i},$$

где δ_{a^i} – дельта функции Дирака:

$$\delta_a^i = \delta(x - a_x^i, y - a_y^i).$$

Функции $c_i(t)$ являются управляющими параметрами и характеризуют интенсивность закачки или отбора флюида на скважине a^i . В первом случае $c_i(t) > 0$, а во втором $c_i(t) < 0$.

Условие непроницаемости границы области имеет вид:

$$(21) \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0.$$

где n – внутренняя нормаль к границе ∂D . Кроме граничного условия нужно задать начальное условие:

$$(22) \quad p(0, x, y) = P(x, y).$$

Уравнение (20) и условия (21), (22) определяют *начальную-краевую задачу Неймана*.

Выбор управляющих воздействий $c_i(t)$ позволяет распределять фильтрационные потоки нужным образом. •

Пример 6. *Управление фильтрационными потоками нефти.* При разработке нефтяных месторождений поддержание энергии нефтяного пласта обеспечивается закачкой под давлением вытесняющей жидкости. В данном примере в качестве такой жидкости выбрана горячая вода.

Одной из классических моделей двухфазной фильтрации в пористой среде является *модель Бакли – Леверетта* [26], описывающая фильтрацию двух несмешивающихся флюидов в изотропной пористой среде.

Итак, рассмотрим задачу двухфазной фильтрации на плоскости, считая один из флюидов (например, первый) нефтью, а второй – водой (см. [1, 2]).

Пусть D – односвязная область плоскости, моделирующая недеформируемую однородную пористую среду, граница ∂D которой гладкая и непроницаемая для флюидов.

Пусть $\rho_i, s_i, \mathbf{U}_i$ – плотность, *насыщенность* (доля i -го флюида в единичном объеме) и скорость i -го флюида соответственно, $i = 1, 2$), m – *коэффициент пористости*, то есть доля объема пор в общем объеме пористой среды; θ – отклонение температуры от равновесной; c_i – удельная теплоемкость. Будем рассматривать однотемпературную модель, основанную на законе Фурье.

3.1. Системы с распределенными параметрами

Система дифференциальных уравнений, описывающая процесс фильтрации, представляет собой законы сохранения для массы и энергии, а также закон Дарси [4], выражающий зависимость скорости фильтрации флюида от градиента давления:

$$U_i = - \frac{k}{\mu_i} f_i(s_i) \nabla p.$$

Здесь k – коэффициент проницаемости пористой среды, μ_i – динамическая вязкость флюида, $f_i(s_i)$ – относительная фазовая проницаемость.

Обезразмеренные дифференциальные уравнения, описывающие процесс двухфазной фильтрации, имеют следующий вид:

$$(23) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial(m p_1 s_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(p_1 U_1) = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial(m p_2 s_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(p_2 U_2) = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial(c \theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\theta p_1 c_1 U_1 + \theta p_2 c_2 U_2) = 0. \end{cases}$$

Здесь ε – характеристическое число (безразмерный параметр), которое зависит от физических и геометрических параметров пласта, а также от характерных интервалов времени его разработки.

Так как $s_1 + s_2 = 1$, то, обозначая s_1 через σ , получим $s_2 = 1 - \sigma$. Решения системы дифференциальных уравнений ищутся в виде асимптотик по характеристическому числу ε :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots,$$

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots,$$

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots$$

Допустим, что в точках $a^i = (a_x^i, a_y^i)$, $i = 1, \dots, m$, области D находятся скважины, на которых поддерживаются заданные режимы давления. Тогда задача расчета фильтрационных потоков в нулевом приближении сводится к задаче Неймана

$$\left. \frac{\partial p_0}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0$$

для уравнения

$$(24) \quad \Delta p_0 = \sum_{i=1}^m c_i(t) \delta_{a^i}$$

в единичном круге. Здесь, как и в примере 5,

$$\delta_{a^i} = \delta(x - a_x^i, y - a_y^i).$$

Уравнение (24) инвариантно относительно конформных преобразований плоскости, а согласно теореме Римана всякую односвязную область с гладкой границей можно конформным преобразованием отобразить в единичный круг. Поэтому без ограничения общности можно считать, что область D является единичным кругом с центром в точке $(0, 0)$. Отметим также, что конформное отображение области на единичный круг зависит только от геометрии области, а не от расположения скважин на ней.

Для круговой области решение задачи Неймана можно найти в явном виде. В результате получаем интегральное представление для давления [1, 2]:

$$p_0(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_j c_j(t) \left[\ln|x - a^j| + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln|x - \eta|}{\ln|\eta - a^j|^2} (1 - (\eta, a^j)) d\psi \right].$$

Здесь $x = (x, y)$, (η, a^j) – скалярное произведение векторов $\eta = (\cos \psi, \sin \psi)$ и $a^j = (a_x^j, a_y^j)$.

Вычисление остальных членов асимптотики сводится к последовательному решению линейных систем дифференциальных уравнений.

Таким образом, описанный метод позволяет рассчитывать фильтрационные нефтяные потоки для нефтяных месторождений произвольной формы (требуется лишь односвязность области) и при любом числе скважин. При этом существенно сокращаются вычислительные мощности, что позволяет ставить и решать задачи оптимального управления разработкой нефтяных месторождений. Например, такие как

3.1. Системы с распределенными параметрами

- получения максимальной добычи нефти при заданном водном запасе;
- использования минимального водного запаса для добычи заданного объёма нефти;
- получения максимального количества нефти при заданных финансовых затратах на закачку и нагрев воды;
- минимизации финансовых затрат на закачку и нагрев воды при заданном уровне добычи нефти.

Подробное изложение этих задач дано в [1]. На рис. 3.1.2 представлены результаты расчета нулевого приближения давления в единичном круге (стрелки показывают направление фильтрационных потоков).

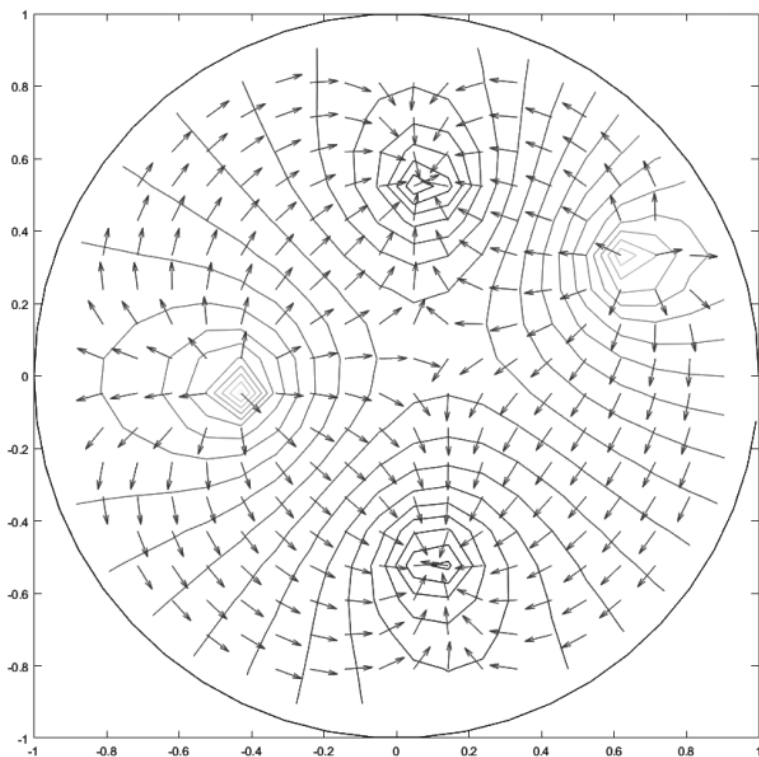


Рис. 3.1.2. Фильтрационные потоки в единичном круге •

6. Сведение управления системами с распределёнными параметрами к управлению системами с сосредоточенными параметрами

Существуют способы, позволяющие свести задачу управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных, к задаче управления системами, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями. Как правило, эти способы основаны на применении *метода разделения переменных*, и в результате получаются бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим, например, систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением в частных производных

$$u_t = \sum_{|\sigma| \leq 2m} a_\sigma(x) \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma} + v(t, x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – пространственные координаты, v – управляющий параметр, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – мульти-индекс, $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ и

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1} \dots \partial x_n^{\sigma_n}}.$$

Уравнение рассматривается в некоторой открытой ограниченной области D при $t \geq 0$.

На границе области D должны выполняться m однородных граничных условий вида

$$M_i(u) = \sum_{|\sigma| < 2m} b_\sigma^i(x) \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma} \Big|_{\partial D} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

а начальные условия имеют вид

$$u(0, x) = u_0(x).$$

В монографии [25] рассматривается следующая задача: построить управление $v(t, x)$, ограниченное по модулю некоторой заданной положительной константой и такое, что соответствующее ему решение обращается в нуль в некоторый конечный момент времени $t = T$. Иначе говоря, всюду в области D должно выполняться условие

3.1. Системы с распределенными параметрами

$$u(T, x) = 0.$$

Решение этой задачи основано на методе Фурье разделения временной и пространственных переменных. Кратко опишем основные идеи (подробности можно найти в монографии [25]).

Пусть оператор

$$A = \sum_{|\sigma| \leq 2m} a_\sigma(x) \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma}$$

– эллиптический, и пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ – собственные функции этого оператора, то есть такие функции, для которых выполнено условие $A\varphi = -\lambda_k \varphi_k$. Кроме того, потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли краевым условиям $M_i(\varphi_k) = 0, i = 1, \dots, m$. Нормировкой можно добиться, чтобы собственные функции образовывали ортонормированную систему, то есть чтобы

$$\int_D \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{kj}$$

для любой пары φ_k, φ_j . Здесь δ_{kj} – символ Кронекера.

Решение ищется в виде разложения по собственным функциям:

$$(25) \quad u(t, x) = \sum q_k(t) \varphi_k(x).$$

Управление $v(t, x)$ также разложим по собственным функциям:

$$v(t, x) = \sum v_k(t) \varphi_k(x).$$

Здесь $v_k(t)$ – пока неизвестные функции.

Подставляя эти разложения в исходное уравнение, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(26) \quad \dot{q}_k + \lambda_k q_k = v_k.$$

Решение (25) удовлетворяет требуемым граничным условиям в силу того, что этим условиям удовлетворяют собственные функции.

Подставляя разложение (25) в начальные условия, найдем начальные условия для уравнений (26):

$$q_k(0) = \int_D u_0(x) \varphi_k(x) dx.$$

Таким образом, задача управления системой, описываемой уравнением в частных производных, свелась к задаче управле-

ния для бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Добавим также, что ещё один способ сведения уравнений в частных производных к обыкновенным уравнениям основывается на поиске *инвариантных решений* относительно физически осмысленных *симметрий* [22].

7. Заключение

Выше приведен краткий обзор наиболее интересных и перспективных (с точки зрения автора) аспектов теории управления системами с распределёнными параметрами. Отметим, что в силу большого разнообразия систем дифференциальных уравнений в частных производных здесь не существует универсального аналога принципа максимума. Однако для ряда конкретных систем аналогичные результаты имеются (см., например, [11–13, 18–20]).

Литература

- 1 АХМЕТЗЯНОВ А.В., КУШНЕР А.Г., ЛЫЧАГИН В.В. *Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений*. – М.: ИПУ РАН, 2017. – 124 с.
- 2 АХМЕТЗЯНОВ А.В., КУШНЕР А.Г., ЛЫЧАГИН В.В. *Оптимальное управление разработкой нефтяных месторождений в модели Бакли–Левретта* // Автоматика и телемеханика. – 2018. – №4. – С. 75–91.
- 3 АХМЕТЗЯНОВ А.В., КУШНЕР А.Г., ЛЫЧАГИН В.В. *Геометрическая теория особых режимов в системах управления с распределёнными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №11. – С. 81–102.
- 4 БАРЕНБЛАТ Г.И., ЕНТОВ В.М. РЫЖИК В.М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах*. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
- 5 БУТКОВСКИЙ А.Г., ЛЕРНЕР А.Я. *Об оптимальном управлении системами с распределёнными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 1960. – Т. 21, №5. – С. 682–691.

3.1. Системы с распределенными параметрами

- 6 БУТКОВСКИЙ А.Г. *Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 1961. –Т. 22, №1. – С. 17–26.
- 7 БУТКОВСКИЙ А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами.* – М.: Наука, 1975. – 568 с.
- 8 БУТКОВСКИЙ А.Г., ДАРИНСКИЙ Ю.В., ПУСТЫЛЬНИКОВ Л.М. *Управление распределенными системами путем перемещения источника* // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №5. – С. 11–30.
- 9 БУТКОВСКИЙ А.Г., ПУСТЫЛЬНИКОВ Л.М. *Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
- 10 ВЛАДИМИРОВ В.С., ЖАРИНОВ В.В. *Уравнения математической физики.* – М.: Физматлит, 2000. – 400 с.
- 11 ЕГОРОВ А.И. *Об оптимальном управлении процессами в распределённых объектах* // Прикладная математика и механика – 1963. –Т. 27, №4. – С. 688–696.
- 12 ЕГОРОВ А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.* – М.: Наука, 1978. – 464 с.
- 13 ЗНАМЕНСКАЯ Л.Н. *Управление упругими колебаниями.* – М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
- 14 ИЛЬИН В.А., МОЙСЕЕВ Е.И. *Оптимизация граничных управлений колебаниями* // УМН. – 2005. – Т. 60, Вып. 6(366). – С. 89–114.
- 15 КОМКОВ В. *Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем.* – М.: Мир, 1975. – 160 с.
- 16 КУБЫШКИН В.А. *Подвижное управление колебаниями в системах с распределенными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Вып. 11. –С. 117–128.
- 17 КУБЫШКИН В.А., ФИНЯГИНА В.И. *Подвижное управление в системах с распределенными параметрами.* – М.: СИНТЕГ, 2005. – 232 с.
- 18 ЛИОНС Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972. – 416 с.
- 19 ЛУРЬЕ К.А. *Оптимальное управление в задачах математической физики.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.

- 20 РАПОПОРТ Э.Я. *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.* – М.: Высш. шк., 2009. – 677 с.
- 21 РУДЕНКО О.В., СОЛУЯН С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики.* – М.: Наука, 1975. – 289 с.
- 22 *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики* / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 380 с.
- 23 ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
- 24 ФУРСИКОВ А.В. *Оптимальное управление распределенными системами.* – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.
- 25 ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л., АНАНЬЕВСКИЙ И.М., РЕШМИН С.А. *Методы управления нелинейными механическими системами.* – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
- 26 BUCKLEY S.E., LEVERETT M.C. *Mechanism of Fluid Displacement in Sands* // Trans. AIME, SPE. – 1942. – Vol. 146. – P. 107–116.
- 27 CATTANEO C. *Sulla conduzione del calore* // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell Univ. di Modena. – 1948. – Vol. 3. – P. 3–21.
- 28 KUSHNER A.G., LYCHAGIN V.V., RUBTSOV V.N. *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations.* – Cambridge: CUP, 2007. – 497 + xxii p.
- 29 LYCHAGIN V.V. *Singularities of Multivalued Solutions of Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Phenomena* // Acta Appl. Math. – 1985. – Vol. 3. – P. 135–173.

3.2. СЕТЕВЫЕ МНОГОАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ

Чеботарев П.Ю.¹

1. Метод Делфи

В 1950-е гг. в RAND Corporation, ведущем американском центре военно-стратегического планирования, был разработан экспертный метод Делфи. Целью было создать инструмент, побуждающий экспертов сближать свои мнения, в идеале (если это возможно) – приходиться к *консенсусу*.

В предельно упрощенном варианте суть метода состоит в следующем. Перед экспертами ставят вопрос, требующий численного ответа. Например, их могут попросить дать прогноз величины какого-либо финансового или экономического показателя. После того как оценки получены, находят их среднее или медиану, и это число сообщают экспертам. Им предлагают пересмотреть свои ответы с учетом среднего мнения группы. По скорректированным оценкам находят новое среднее, и эксперты узнают его в следующем раунде опроса. Процесс завершается, когда ответы экспертов стабилизируются.

Метод имеет достоинства и недостатки. С одной стороны, расхождение собственной и средней оценок заставляет эксперта задуматься и учесть большее число факторов. С другой, стимулирует конформизм.

Однако в действительности эксперту важно знать мнения не всех, а тех, кому он доверяет. Аналог метода Делфи, в котором разные эксперты получают разную информацию, появился также в 50-е гг. Но все богатство модели, описывающей такую динамическую трансформацию мнений, – ее математическая содержательность, потенциал обобщений и целый спектр неожиданных приложений – были обнаружены и исследованы лишь через несколько десятилетий.

¹ Павел Юрьевич Чеботарев, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.ф.-м.н. (pavel4e@gmail.com).

2. Модель Де Гроота

В 1974 г. известный американский статистик Моррис Де Гроот опубликовал 4-страничную статью под названием «Достижение консенсуса» (“Reaching a Consensus”) [11]. Он предложил изящный способ итеративного преобразования набора субъективных распределений вероятностей в единое распределение. Де Гроот отмечал, что тем же способом можно согласовывать и оценки скалярных величин. Для простоты рассмотрим именно эту версию его модели.

Пусть n агентов (экспертов) оценивают некоторую величину, и $y_i(0)$ – оценка, полученная от i -го агента в момент $k = 0$.

Далее агенты итеративно корректируют свои оценки следующим образом:

$$(1) \quad y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где коэффициент $p_{ij} \geq 0$ – степень учета i -м агентом мнения j -го агента, причем для каждого i имеет место $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$. Если оценки $y_i(k)$ представить вектором $y(k) = (y_1(k), \dots, y_n(k))^T$, а из коэффициентов p_{ij} составить матрицу $P = (p_{ij})_{n \times n}$, то (1) записывается в виде

$$(2) \quad y(k+1) = Py(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где P – строчно стохастическая матрица: ее элементы неотрицательны и строчные суммы равны единице.

Модель, исследованная Де Гроотом, была новой для статистической теории принятия решений, но по существу она повторяла модель, предложенную социологом Френчем [13] еще в 1956 г. Последняя была проанализирована выдающимся специалистом по теории графов Харари [15] в 1959 г. Для прикладной математики эта ситуация в высшей степени типична: многие приложения структурно похожи, потому исследователи часто разрабатывают для них эквивалентные математические методы и модели. То, что созданное для других приложений часто игнорируется, приводит к многократному переоткрытию и независимой публикации одних и тех же математических результатов, причем порой через десятилетия, см. [12, 14, 21].

3. Анализ модели Френча – Де Гроота

Главные вопросы, которые возникают в связи с моделью Френча – Де Гроота: что происходит с вектором оценок $y(k)$ при $k \rightarrow \infty$? Будут ли оценки стабилизироваться? Будут ли они сходиться к общему пределу? Последний тип поведения называют консенсусом: в системе (1) реализуется *асимптотический консенсус*, если при некотором $c \in \mathbb{R}$

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_i(k) = c, \quad i = 1, \dots, n.$$

В какой мере ответы на предыдущие вопросы зависят от начальных оценок экспертов?

Первое исследование модели провел Дж. Френч. Далее анализ ее продолжил Ф. Харари.

Де Гроот заметил, что модель (2) имеет много общего с моделью *цепи Маркова*. Действительно, пусть $d(0) = (d_1(0), \dots, d_n(0))$ – начальное распределение вероятностей на множестве n состояний конечной цепи Маркова с матрицей переходов P . Тогда распределение вероятностей состояний на шаге k выражается формулой

$$(4) \quad d(k) = d(0)P^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

В то же время из (2) следует

$$(5) \quad y(k) = y(0)P^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Сравнение формул (4) и (5) приводит к выводу, что асимптотические свойства модели консенсуса (2) и распределения состояний цепи Маркова (4) определяются свойствами последовательности степеней матрицы P : $P^1, P^2, \dots, P^k, \dots$. Поскольку модель цепи Маркова, впервые описанная А.А. Марковым в 1906 г., хорошо исследована, полученные для нее результаты [19, раздел 8.4] можно применить к анализу модели поиска консенсуса (5). Кроме того, в данной области применяются результаты спектральной теории графов, упомянутые в [10], а при анализе непрерывных моделей используется классическая теория линейных дифференциальных уравнений. Совместно эти результаты приводят к следующим теоремам, фрагменты которых представлены в [11, 12, 14, 18, 20, 21, 22, 23, 26] и других работах.

Теорема 1. В модели (2) при всех начальных оценках реализуется асимптотический консенсус, если и только если собственное значение 1 матрицы P имеет кратность 1 и P не имеет других собственных значений с модулем 1.

Если первое условие нарушается, а второе выполнено, то вектор $y(k)$ сходится при $k \rightarrow \infty$, но при некоторых начальных оценках элементы предельного вектора различны.

Если нарушено второе условие, то при некоторых начальных оценках вектор $y(k)$ не сходится, причем два или более его элемента $y_i(k)$ асимптотически приближаются к периодическим функциям от k , получающимся друг из друга сдвигом по k .

Пример 1. Чтобы проиллюстрировать теорему 1, обратимся к системе (2), задаваемой вектором начальных оценок $y(0) = (1, 2, 3)^T$ и матрицей

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для нее $y(1) = (3, 1, 2)^T$, $y(2) = (2, 3, 1)^T$ и т.д.: $y(3k) = (1, 2, 3)^T$, $y(3k+1) = (3, 1, 2)^T$, $y(3k+2) = (2, 3, 1)^T$, $k = 1, 2, \dots$ Эксперты (более общее название – *агенты*) передают друг другу оценки «по кругу» (рис. 3.2.1): первый – второму, второй – третьему, третий – первому.

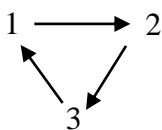


Рис. 3.2.1. Ориентированный граф влияний Γ в примере 1

В результате последовательность оценок 1-го агента: $(1, 3, 2, 1, 3, 2, \dots)$, а последовательности оценок 2-го и 3-го получаются из нее сдвигами. Асимптотический консенсус не реализуется.

Проверим условия теоремы 1. Спектр (набор собственных значений) матрицы P : $(1; -0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, где через i

(прямого начертания, в отличие от i) обозначена мнимая единица. Поскольку $\left| -0,5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$ (модуль второго и третьего собственных значений P равен единице), в системе реализуется поведение 3-го типа. Действительно, как было установлено, оценки меняются с периодом 3 и сдвигом по времени k . •

Рассмотрим другой пример.

Пример 2. Пусть система (2), задается вектором начальных оценок $y(0) = (2, 31/9, 3, 40)^T$ и матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Расчет показывает, что при этом $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = (3, 3, 3, 3)^T$, то есть реализуется асимптотический консенсус. Однако при начальных оценках $y(0) = (2, 57/9, 3, 40)^T$ консенсуса нет: $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = (5, 5, 3, 13/3)^T$.

Построим взвешенный ориентированный граф влияний, веса дуг в котором – элементы матрицы P (рис. 3.2.2, петли не показаны).

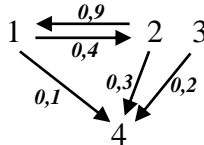


Рис. 3.2.2. Ориентированный граф влияний Γ в примере 2

Граф помогает понять динамику системы. Агенты 1 и 2 влияют на себя и друг на друга. Они самостоятельно приходят к асимптотическому консенсусу, поскольку на пару (1, 2) нет влияний со стороны. На 3 также нет внешних влияний, поэтому 3 сохраняет свою начальную оценку. 4 итерационно усредняет оценки всех агентов. Таким образом, консенсус в паре (1, 2) может совпасть с постоянной оценкой 3 лишь при специально подобранных начальных оценках 1 и 2. Это и происходит при $y(0) = (2, 31/9, 3, 40)^T$. В общем случае (например,

при $y(0) = (2, 57/9, 3, 40)^T$ асимптотического консенсуса в системе нет. Наконец, судя по двум примерам начальных данных, предельная оценка агента 4 не зависит от его начальной оценки. Причину этого легко понять: начальная оценка агента 4 действует на первом шаге, далее ее влияние мультипликативно ослабляется. В отличие от этого, влияние начальных оценок остальных агентов при увеличивающемся k распространяется растущим числом маршрутов (включающих петли) длины k .

Проверим условия теоремы 1. Спектр матрицы P : $(1; 1; 0,4; -0,3)$. Поскольку собственное значение 1 имеет кратность 2 и нет иных собственных значений модуля 1, в системе реализуется поведение 2-го типа: $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ существует, но компоненты этого предельного вектора в общем случае различны. •

4. Теоретико-графовый критерий консенсуса

Теорема 1 является спектральным критерием асимптотического консенсуса для модели Френча – Де Гроота. Как показывают примеры предыдущего подраздела, в некоторых случаях понять, гарантирует ли матрица P асимптотический консенсус в системе, можно просто посмотрев на соответствующий ей ориентированный граф влияний. Существует ли графовый критерий консенсуса?

Ответ – да. Чтобы сформулировать этот критерий, напомним несколько понятий теории ориентированных графов.

Орграф называют *сильно связным* (или *сильным*), если он содержит направленные пути из каждой вершины в каждую. Любой максимальный по включению сильный подграф данного орграфа называется его *сильной компонентой*, или *бикомпонентой*. *Базовой бикомпонентой* называют такую бикомпоненту орграфа, в которую не входят дуги извне. Легко показать, что из множества всех *базовых вершин* (вершин базовых бикомпонент) имеются пути во все вершины орграфа. Орграф называют *слабо связным*, если связан граф, получающийся из орграфа заменой всех его дуг на неориентированные ребра. *Слабые компоненты* орграфа – максимальные по включению слабо связные подграфы этого орграфа.

Подграф ориентированного графа называют *остовным*, если множества вершин графа и подграфа совпадают. *Исходящее дерево* – это слабо связный орграф, где есть одна вершина, называемая корнем, куда не входит ни одна дуга, а в остальные вершины входит ровно по одной дуге. *Исходящий лес* – это орграф, все слабые компоненты которого – исходящие деревья.

В предыдущем подразделе рассматривался взвешенный орграф влияний Γ системы вида (2). Дуга из вершины j в вершину i в нем проводилась тогда и только тогда, когда $p_{ij} \neq 0$; при этом величина p_{ij} была весом дуги $j \rightarrow i$.

Из этого определения следует, что матрица весов дуг орграфа Γ ($W = (w_{ij})$, где w_{ij} – вес дуги $i \rightarrow j$), которую называют также *взвешенной матрицей смежности* вершин Γ , совпадает с P^Γ . Всегда, когда $p_{ij} \neq 0$, в Γ проводится дуга $i \rightarrow i$, называемая *петлей*. На рис. 3.3.2 петли (которые легко восстановить в силу стохастичности P) не отображались для простоты.

Следующая теорема – графовый критерий консенсуса для модели Френча – Де Гроота (аналог теоремы 1).

Теорема 2. *В модели (2) при всех начальных оценках реализуется асимптотический консенсус, если и только если в орграфе влияний Γ системы есть остовное исходящее дерево и нет базовой вершины i такой, что наибольший общий делитель t_i длин всех направленных циклов¹, включающих i , превосходит 1.*

Если первое условие нарушается, а второе выполнено, то вектор $y(k)$ сходится при $k \rightarrow \infty$, но при некоторых начальных оценках элементы предельного вектора, относящиеся к разным базовым бикомпонентам, различны.

Если нарушено второе условие, то при некоторых начальных оценках вектор $y(k)$ не сходится, причем элементы $y_i(k)$, соответствующие вершине i , нарушающей условие, и всем другим вершинам той же базовой бикомпоненты, асимптотически приближаются к функциям от k с периодом t_i , получающимся друг из друга сдвигом по k .

¹ В цикле вершины (в отличие от дуг) могут повторяться.

Важно отметить, что петля – это направленный цикл длины 1, поэтому вершина с петлей не может нарушать второе условие. Петли входят и в другие циклы: например, в орграфе Γ , соответствующем матрице $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, кроме цикла

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ есть цикл $2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, и вершина 2 не нарушает второго условия. Если условия теоремы 1 требуют для проверки методов матричного анализа, то условия теоремы 2 проверяются с помощью алгоритмов поиска по графу. В то же время второй критерий более нагляден и более конкретен: он позволяет указать элементы вектора $y(k)$, ответственные за нарушение консенсуса.

Легко видеть, что в примере 1 из предыдущего подраздела первое условие теоремы 2 выполнялось (остовными исходящими деревьями в Γ были $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$), но второе нарушалось: каждая вершина входила лишь в цикл длины 3. В примере 2, напротив, первое условие теоремы 2 нарушалось (в Γ не было остовного исходящего дерева), а второе выполнялось, так как в единственной бикомпоненте (с вершинами 1 и 2), которая могла бы его нарушить, у вершин имелись петли.

5. Дифференциальная модель консенсуса первого порядка

До сих пор рассматривались модели с дискретным временем. Пусть теперь, как и ранее, система состоит из n агентов, но у каждого из них есть характеристика $x_i(t) \in \mathbb{R}$ (i – номер агента), изменяющаяся в непрерывном времени t . N_i – множество агентов-«соседей», к характеристикам которых агент i хотел бы приблизить свое значение $x_i(t)$.

Под характеристикой $x_i(t)$ можно понимать экспертную оценку, например, текущее предложение по величине ассигнований на определенные нужды. Но это может быть и физическая координата, если цель агентов (например, мобильных роботов) – встретиться в пространстве. Величина $x_i(t)$ может быть скоростью или направлением движения, если беспилотные аппараты движутся группой. Она может быть частотой или (при равной

частоте) фазой колебаний в задачах синхронизации осцилляторов.

Согласование (сближение) характеристик агентов может производиться в соответствии с моделью

$$(6) \quad \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a_{ij} > 0$, когда $j \in N_i$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Модель имеет следующий смысл. В каждый момент t агент i решает, увеличивать или уменьшать ему свою характеристику $x_i(t)$ и какой должна быть скорость ее изменения $\dot{x}_i(t)$. Он сравнивает $x_i(t)$ с текущей характеристикой «соседа» $x_j(t)$ и разницу между ними учитывает с коэффициентом a_{ij} , выражающим важность приближения $x_i(t)$ к $x_j(t)$. Произведение $a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))$ положительно, если $x_i(t) < x_j(t)$, и отрицательно, если $x_i(t) > x_j(t)$. В итоге знак и величина $\dot{x}_i(t)$ определяются суммой отдельных вкладов, знаки которых могут быть различными.

Таким образом, (6) можно рассматривать как непрерывную (в отличие от (2)) модель поиска консенсуса. Такие модели называют также *протоколами*. Матричная форма уравнений (6):

$$(7) \quad \dot{x}(t) = -Lx(t),$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ и матрица $L = (l_{ij})$ определяется формулой

$$(8) \quad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{при } j \neq i, \\ \sum_{k \neq i} a_{ik} & \text{при } j = i. \end{cases}$$

Следующая теорема является спектральным критерием асимптотического консенсуса (то есть равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(t) = c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$ и $i = 1, \dots, n$) в модели (7).

Теорема 3. *В модели (7) при всех начальных условиях $x(0)$ реализуется асимптотический консенсус, если и только если собственное значение 0 матрицы L имеет кратность 1. Если это условие нарушено, то вектор $x(t)$ сходится при $t \rightarrow \infty$, но при некоторых начальных условиях элементы предельного вектора различны.*

Теорема 3 и теорема 1 похожи, но, как нередко бывает, в модели с непрерывным временем результат проще: нарушение

сходимости при поиске консенсуса невозможно.

Рассмотрим оргграф влияний Γ системы (7), определяемый следующим образом. Вершинами Γ являются агенты $1, \dots, n$, и дуга от j к i проводится, если и только если $a_{ij} \neq 0$, причем вес этой дуги равен a_{ij} . Матрица L , определенная формулой (8), является лапласовской матрицей, но не взвешенного оргграфа Γ , а взвешенного оргграфа зависимостей системы, получающегося из Γ изменением направления всех дуг при сохранении их весов.

Теорема 4 представляет теоретико-графовый критерий консенсуса для системы (7), который также проще, чем соответствующий критерий (см. теорему 2) для системы (2).

Теорема 4. *В модели (7) при всех начальных условиях $x(0)$ реализуется асимптотический консенсус, если и только если в оргграфе влияний Γ системы есть остовное исходящее дерево. Если это условие нарушено, то вектор $x(t)$ сходится при $t \rightarrow \infty$, но при некоторых начальных условиях элементы предельного вектора, относящиеся к разным базовым бикомпонентам Γ , различны.*

Из формулировки теоремы 4 следует, что в оргграфе, не имеющем остовных исходящих деревьев, есть хотя бы две базовые бикомпоненты. Иллюстрацией этого простого факта из теории графов может служить рассмотренный ранее пример 2, где оргграф Γ (см. рис. 3.3.2), не содержащий остовного исходящего дерева, имеет две базовые бикомпоненты: $\{1, 2\}$ и $\{3\}$.

Модель (7), как и модель Френча – Де Гроота, неоднократно предлагалась разными авторами для разных задач, но впервые была рассмотрена, по-видимому, в работе [8]. Она имеет глубокую связь с уравнением теплопроводности, см. [17].

6. Связь дискретной и непрерывной моделей консенсуса

Поскольку рассмотренные выше результаты, относящиеся к дискретной (2) и непрерывной (7) моделям консенсуса, очень похожи, возникает вопрос: «Связаны ли эти модели напрямую?»

Построим дискретный аналог модели (7), дав аргументу t малое приращение $\tau > 0$ и заменив производную на отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$(9) \quad \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = -Lx(t).$$

Положим $y(k) = x(k\tau)$. Тогда $y(k)$ – вектор-функция, изменяющаяся в дискретном времени, значения которой определяются значениями функции $x(t)$. В силу (9) при $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{\tau} = \frac{x(k\tau + \tau) - x(k\tau)}{\tau} = -Lx(k\tau) = -Ly(k).$$

Отсюда

$$(10) \quad y(k+1) = (I - \tau L)y(k) = Py(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $P = I - \tau L$, I – единичная матрица. Заметим, что недиагональные элементы матрицы τL неположительны, следовательно, недиагональные элементы $I - \tau L$ неотрицательны. Далее, τL имеет нулевые строчные суммы, значит, строчные суммы $I - \tau L$ равны 1. Наконец, диагональные элементы τL неотрицательны, поэтому при достаточно малом τ диагональные элементы $P = I - \tau L$ также неотрицательны, и при таком τ матрица P строчно стохастическая.

Насколько малым должно быть для этого τ ? Из определения (8) матрицы L получаем следующее ограничение на τ , равносильное неотрицательности диагонали матрицы $P = I - \tau L$:

$$(11) \quad \tau \leq \left(\max_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \right)^{-1}.$$

Вывод: модель (10), полученная из модели (7) дискретизацией времени, при ограничении (11) совпадает с моделью (2).

Если (11) выполняется строго, то второе условие теоремы 2 выполнено, так как при каждой вершине Γ есть петля, и в дискретной модели поиска консенсуса (10) имеет место сходимость.

7. Как выражается консенсус?

В предыдущих подразделах подробно обсуждались критерии асимптотического консенсуса, но не было представлено выражение для консенсуса. Установленная связь между дискретной и непрерывной моделями консенсуса позволяет сделать это для обеих моделей одновременно. Напомним, что левым собственным вектором квадратной матрицы A , отвечающим ее

собственному значению λ , называется вектор v , такой что $v^T A = \lambda v^T$.

Теорема 5. Пусть в модели (2) консенсус реализуется при любых начальных условиях $y(0)$ и v – левый собственный вектор матрицы P , отвечающий собственному значению 1. Тогда консенсус выражается формулой $c = v^T y(0)$.

Пусть в модели (7) консенсус реализуется при любых начальных условиях $x(0)$ и v – левый собственный вектор матрицы L , отвечающий собственному значению 0. Тогда консенсус выражается формулой $c = v^T x(0)$.

Пусть модель (2) получена из модели (7) дискретизацией при выполнении (11) в строгой форме, и в модели (2) консенсус реализуется при любых начальных условиях. Тогда значения консенсуса в этих моделях совпадают.

Заметим, что необходимыми условиями сходимости к консенсусу независимо от начальных условий являются соответственно простота собственного значения 1 матрицы P и собственного значения 0 матрицы L . Поэтому левый собственный вектор, упоминаемый в теореме 5, единственен. Единственным правым собственным вектором, отвечающим этим собственным значениям, является вектор из единиц, поскольку матрица P строчно стохастическая, а матрица L имеет нулевые строчные суммы.

8. О понятии многоагентной системы

Говоря о взаимодействующих агентах, мы до сих пор не дали определение многоагентной системы. Это не случайно.

Дело в том, что понятие это является весьма универсальным и, как правило, специалист, работающий в данной области теории управления, считает многоагентной системой прежде всего то, чем занимается он сам.

Все сходятся в том, что *многоагентная* (или *мультиагентная*) *система* (МАС) есть совокупность взаимодействующих автономных агентов, рассматриваемая как единое целое. Таким образом, центральными являются понятия «агент» и «взаимодействие». И здесь мы сталкиваемся с большим разнообразием вариантов.

«Агенты» могут быть людьми, животными, роботами, иными техническими устройствами, например, осцилляторами, а также программными агентами, действующими в различных сетях или на различных торговых/переговорных площадках. С точки зрения теории, если агенты пользуются одними и теми же алгоритмами и описываются одними и теми же моделями, то физическая их природа отступает на второй план. Принципиальны, однако, некоторые свойства. К ним относят: относительную *автономность* агентов; различие если не стоящих перед ними конечных целей (что тоже не редкость), то уж точно решаемых в реальном времени конкретных задач; а также *неполноту информации*, которой оперирует каждый агент.

«Интеллектуальность» агентов, напротив, не является необходимым условием: многие многоагентные системы состоят из простых агентов, и при этом поведение всей системы может быть достаточно сложным – благодаря использованию настраиваемой системы связей. Данный эффект описывается понятиями *эмерджентности* (наличие у системы свойств, прямо не сводящихся к свойствам ее элементов) и *роевого/эмерджентного интеллекта* [7].

Таким образом, на первый план выступают *особенности взаимодействия* агентов.

Система может быть одноуровневой (с горизонтальными связями агентов) либо иерархической – с агентами, располагающимися на разных уровнях иерархии. Управление системой может быть централизованным, децентрализованным либо сочетающим элементы централизации и децентрализации.

Но сильнее всего специфику системы определяет *характер связей* агентов. С начала XXI века наблюдается «взрыв» в теории *сетевых* многоагентных систем, где свойства системы главным образом определяются графом горизонтальных связей между агентами. Развиваются и традиционные разделы теории многоагентных систем, где поведение системы определяется не полностью формализованными переговорами агентов, роли которых могут различаться (пилоты, диспетчеры, аналитики, системные администраторы, менеджеры и др.). Специфика системы может определяться и методами принятия групповых решений. Взаимодействие агентов может быть игровым, аукци-

онным и т.д. Наконец, контакты агентов могут быть прямыми (от агента к агенту) или косвенными (стигмергия, доски объявлений и др.).

Ясно, что каждый тип многоагентных систем, выделяемый характером взаимодействия агентов и детерминантами динамики системы, требует отдельного рассмотрения.

В данном разделе мы сосредоточились на сетевых многоагентных системах, причем в основном на одной теме – моделях консенсуса, составляющих ядро алгоритмов децентрализованного управления такими системами. Почему эта тема является центральной, обсудим в следующем подразделе.

9. Почему протоколы консенсуса составляют ядро алгоритмов децентрализованного управления сетевыми системами?

Краткий ответ на вопрос, вынесенный в заголовок подраздела, сводится к следующему. Если агенты неспособны достичь консенсуса, то система не может решать какие-либо задачи как единое целое – она распадается. Тем самым достижение консенсуса – необходимое условие дееспособности сетевой многоагентной системы, ее системообразующий фактор. Далее, именно решение задач консенсуса в наибольшей мере заключает в себе специфику децентрализованного управления. Если многоагентную систему удастся консолидировать посредством консенсуса, далее задачи управления, как правило, решаются обычными, не сетевыми методами (см. [26]).

Именно поэтому возникший в 2000-е гг. бум синтеза и исследования систем сетевого децентрализованного управления привел к публикации тысяч работ, посвященных в основном консенсусу – в системах разных порядков, с разной динамикой, дискретных и непрерывных, детерминированных и стохастических, с ошибками в измерениях и конечной точностью, с разнотипными запаздываниями, переключениями и асинхронностью, с возможными деградацией или изменением состава агентов и/или структуры их взаимодействия (см., например, [1, 22, 23]). Реализовав эффективные протоколы консенсуса, авторы этих работ создавали условия для решения группами агентов разно-

образных практических задач: выполнения совместных маневров, выстраивания и сохранения геометрической формы – *формации (Formation)*, перемещения грузов, роботизированного строительства, логистики, составления расписаний, выстраивания производственных и энергетических сетей, координации групп войск, организации движения транспорта и сетевых вычислений, организации и реконфигурации mesh-сетей, обнаружения и отражения киберугроз и т.д. и т.п. (см. [2] и структурную схему агента, представленную на рис. В.1.9). При этом задачи, которые оставалось решить после достижения консенсуса, имели в основном уже не сетевую специфику.

Одна из самых высокоцитируемых статей данного направления – [20]. По данным Google Scholar на февраль 2018 г. она включена в списки литературы более чем 8950 последующих работ. Что в ней сделано? Выписан простейший протокол консенсуса (7) и получены (не всегда безусловно) результаты его анализа, в том числе для систем с переключениями и задержками (см. также [10]). Отчасти аналогична работа [16] (более 7300 цитирований), в которой переоткрыты некоторые результаты, полученные намного раньше [9].

В определенной мере суть дела выражает следующая метафора. Как известно, общее решение неоднородной системы уравнений есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной. Решение задачи консенсуса аналогично получению общего решения однородной системы; остается, учтя «специфику правых частей», найти частное решение неоднородной задачи. Модели консенсуса стали «универсальным каркасом», к которому специалисты по управлению прикрепили все то, чем они занимались раньше. Во многих случаях этого было достаточно, чтобы, применив полученные ранее результаты, решить новые задачи, сформулированные в сетевой постановке. Таково объяснение многих тысяч цитирований базовых работ по протоколам консенсуса.

Приведем характерный пример того, как посредством достижения консенсуса можно решить совершенно иную, на первый взгляд, задачу. Пусть беспилотные аппараты, оборудованные средствами навигации, должны выстроиться

в определенную геометрическую фигуру. Представим себе, что каждый аппарат сразу находится в предписанной ему точке, но... в своей индивидуальной системе координат. Тогда всё, что им остается сделать, – это согласовать системы координат. Типичная задача консенсуса. Как только это будет сделано, задача выстраивания формации будет решена. По поводу использования протоколов консенсуса при решении других содержательных задач см., например, [6, 18, 25].

10. Обобщенная модель непрерывной динамики многоагентной сети

Переходя от упрощающей метафоры предыдущего подраздела к точным представлениям, рассмотрим достаточно общую дифференциальную модель сетевой многоагентной системы [6]:

$$(12) \quad \dot{x}_i = F_i(t, x_i, u_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \varphi_{ij}(x_i, x_j), \quad y_i = h_i(x_i, u_i),$$

где $i = 1, \dots, n$, x_i – вектор *состояния* агента i ; $u_i = u_i(t)$ – входы (*управления*); $y_i = y_i(t)$ – наблюдения (*выходы*); функции $F_i(\cdot)$ описывают индивидуальную динамику агентов; $\varphi_{ij}(\cdot)$ – взаимодействия между ними (так, в модели (6) имеем $\varphi_{ij}(x_i, x_j) = x_j - x_i$); коэффициенты $a_{ij}(t)$, выражающие структуру и силу связей между агентами, в отличие от (6), зависят от времени.

Важно отметить, что функции связи $\varphi_{ij}(\cdot)$ и коэффициенты усиления $a_{ij}(t)$ могут рассматриваться как параметры *распределенного алгоритма управления*. Именно поэтому модель (6), в которой нет входов u_i модели (12), часто записывают в виде [20]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= u_i(t), \\ u_i(t) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где величины $u_i(t)$ трактуются как управления.

Если же взаимодействие $\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \varphi_{ij}(x_i, x_j)$ является внутренним механизмом сети, а не частью управляющего контура, то уравнения (12) можно рассматривать как модель динамической системы с управляющими входами u_i и выходами y_i . Инструментом управления быть и начальное состояние систе-

мы. О некоторых особенностях управления многоагентными системами на примере социальных сетей см. [3].

Функции $F_i(t, x_i, u_i)$ и $\varphi_{ij}(x_i, x_j)$ в (12) часто составлены из нескольких слагаемых. Проиллюстрируем это на примере движения группы квадрокоптеров [24]. Здесь состояние $x_i(t)$ включает векторы положения и скорости агента i ; уравнение (12) определяет вектор ускорения. Слагаемые функции $F_i(t, x_i, u_i)$ могут задавать элементы ускорения, отвечающие в числе прочего за:

- приближение агента к цели;
- приближение скорости к величине, предписанной для совместного движения или маневра;
- облет препятствий.

В свою очередь слагаемые функции $\varphi_{ij}(x_i, x_j)$ могут задавать элементы ускорения, отвечающие за:

- приближение расстояния между i и j к предписанному и исключение столкновений агентов i и j ;
- приближение скорости i к скорости j .

Среди агентов могут быть так называемые *лидеры*. В этом случае соответствующие им уравнения задают предписанную автономную – не зависящую от других агентов – динамику.

Для систем (12) и их дискретных аналогов решаются традиционные задачи устойчивости, робастности, оптимальности и др. При этом используются методы, рассмотренные в [5].

11. Конец 2010-х: конструирование многоагентных систем, эффективно потребляющих ресурсы

Что характерно для текущего периода развития теории сетевых многоагентных систем? Многие теоретические задачи, имеющие простую постановку, решены. Некоторые другие оказались крайне сложными. Создан ряд реальных систем и прототипы других, осознаны трудности на этом пути. Опубликованы десятки тысяч теоретических и прикладных работ и сотни монографий.

Стало ясно, что для мобильных агентов нерентабельно непрерывно проводить измерения и обмениваться сетевыми сообщениями. Поскольку переключения управляющих воздействий происходят в дискретные моменты, важно рационально

определять эти моменты, чем может достигаться значительная экономия энергетических, коммуникационных и вычислительных ресурсов. В свою очередь такая экономия требует более сложных алгоритмов управления. Поэтому едва ли не самый интенсивный поток работ посвящен сегодня задачам *событийного асинхронного управления* (см., например, [4]). Каждый агент, пользуясь имеющейся у него информацией, прогнозирует динамику системы и на основании этого оценивает свою потребность в новой информации. Исходя из этого он принимает решения, когда ему проводить следующие измерения, когда посылать другим агентам полученные данные, а также запросы на получение результатов их измерений, когда переключать управление. Все это происходит, как правило, асинхронно, то есть разными агентами в разные, вообще говоря, нерегулярные моменты времени. Разработка именно таких интеллектуальных алгоритмов взаимодействия агентов находится сейчас в фокусе внимания специалистов по децентрализованному управлению сетевыми многоагентными системами.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 30. – С. 470–505.
2. ГОРОДЕЦКИЙ В.И., БУХВАЛОВ О.Л., СКОБЕЛЕВ П.О. и др. *Современное состояние и перспективы индустриальных применений многоагентных систем* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 66. – С. 94–157.
3. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: МЦНМО, 2018. – 224 с.
4. КОЗЯКИН В.С., КУЗНЕЦОВ Н.А., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I. Асинхронные модели консенсуса* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №4. – С. 3–40.

5. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
6. ПРОСКУРНИКОВ А.В., ФРАДКОВ А.Л. *Задачи и методы сетевого управления // Автоматика и телемеханика*. – 2016. – №10. – С. 3–39.
7. РЖЕВСКИЙ Г.А., СКОБЕЛЕВ П.О. *Как управлять сложными системами? Мультиагентные технологии для создания интеллектуальных систем управления предприятия*. – Самара: Офорт, 2015. – 290 с.
8. ABELSON R. *Mathematical Models of the Distribution of Attitudes under Controversy // In: Contributions to Mathematical Psychology / N. Frederiksen, H. Gulliksen, eds.* – New York: Holt, Rinehart & Winston, 1964. – P. 142–160.
9. BERTSEKAS D.P., TSITSIKLIS J.N. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
10. CHEBOTAREV P. *Comments on “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems” // Proc. IEEE*. – 2010. – Vol. 98, No. 7. – P. 1353–1354.
11. DE GROOT M.H. *Reaching a Consensus // J. Amer. Statist. Assoc.* – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.
12. FAGNANI F., FRASCA P. *Introduction to Averaging Dynamics over Networks*. – Springer, 2018. – XII + 135 p.
13. FRENCH J. *A Formal Theory of Social Power // Psychol. Rev.* – 1956. – V. 63. – P. 181–194.
14. FRIEDKIN N. *A Formal Theory of Social Power // J. of Math. Sociology*. – 1986. – Vol. 12, No. 2. – P. 103–126.
15. HARARY F. *A Criterion for Unanimity in French’s Theory of Social Power // In: Studies in Social Power / D. Cartwright, ed.* – Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1959. – P. 168–182.
16. JADBABAIE A., LIN J., MORSE A.S. *Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules // IEEE Trans. Automatic Control*. – 2003. – Vol. 48, No. 6. – P. 988–1001.

17. KONDOR R.I., LAFFERTY J. *Diffusion Kernels on Graphs and Other Discrete Structures* // Proc. of ICML, 2002. – P. 315–322.
18. MESBAHI M., EGERSTEDT M. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. – Princeton University Press, 2010. – XX + 403 p.
19. MEYER C.D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. – SIAM, 2001. – XII + 718 p.
20. OLFATI-SABER R.M., MURRAY R.M. *Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays* // IEEE Trans. Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, No. 9. – P. 1520–1533.
21. PROSKURNIKOV A.V., GRANICHIN O.N. *Evolution of Clusters in Large-Scale Dynamical Networks* // Cybernetics and Physics. – 2018. – Vol. 7, No. 3. – P. 102–129.
22. REN W., BEARD R.W. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*. – London: Springer. – 2008. – XVI + 319 p.
23. REN W., CAO Y. *Distributed Coordination of Multi-Agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*. – Springer, 2011. – XVIII + 310 p.
24. VÁSÁRHELYI G. et al. *Outdoor Flocking and Formation Flight with Autonomous Aerial Robots* // 2014 IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst. (IROS 2014). – IEEE, 2014. – P. 3866–3873.
25. VEERMAN J.J.P., LAFFERRIERE G., CAUGHMAN J.S., WILLIAMS A. *Flocks and Formations* // J. Statistical Physics. – 2005. – Vol. 121, No. 5–6. – P. 901–936.
26. YU W., WEN G., CHEN G., CAO J. *Distributed Cooperative Control of Multi-Agent Systems*. – Wiley, 2017. – 242 p.

3.3. СЕТЕВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Андриевский Б.Р.¹, Матвеев А.С.²

1. Введение

Критическое значение *сетевых технологий* в различных сферах жизни современного человека и в качестве факта, и в качестве тенденции уже настолько очевидно, что впору говорить о новом этапе его развития как вида: от «человека прямоходящего» (*Homo erectus*) через «человека разумного» (*Homo sapiens*) к «человеку сетевому» (*Homo intextus*). Системы управления не остались в стороне этого процесса, напротив, они лежат в его фокусе. Примерно на рубеже тысячелетий активное привнесение сетевых мотивов в проблематику теории управления привело к дальнейшему развитию ее содержания, результат которого можно трактовать как новую главу этой теории. В данном разделе мы кратко коснемся лишь ее отдельных аспектов, имея целью дать начальное представление о предмете исследования и характере результатов. Для более развернутого ознакомления читатель может обратиться к [1, 9, 12, 13, 17, 18, 23, 27–29].

Упомянутое новое направление теории управления опирается на классическую теорию и в значительной степени разделяет с ней проблематику. Вопросы управляемости системы, построения достоверной оценки ее состояния по неполным данным, стабилизации системы и многие другие традиционные для теории управления темы по-прежнему в центре внимания. Вместе с тем в постановку вопроса привносятся дополнительные мотивы, обусловленные «сетевой» ориентацией, что приводит к новым математическим моделям и дополнительным вопросам. Охарактеризуем в самых общих чертах некоторые из факторов, определяющих лицо теории сетевых систем управления.

¹ Борис Ростиславич Андриевский, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург; д.т.н. (boris.andrievsky@gmail.com).

² Алексей Серафимович Матвеев, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург; д.ф.-м.н., профессор (almat1712@yahoo.com).

Сам по себе термин *сетевая система* уже вызывает образ совокупности элементов, которые не изолированы друг от друга, а связаны, воздействуют друг на друга тем или иным образом. В контексте данного раздела элементы понимаются как носители традиционных для теории управления амплуа, например, *датчиков (Sensors)*, *исполнительных устройств (Actuators)*, *регуляторов (Controllers)*, *центров принятия решений (Decision centers)*, отдельных *объектов управления (Plants)*¹ и т.п., а также их комбинаций. В случае *информационных связей* к ним могут добавляться, например, *ретрансляторы (Retranslators)*, *хранилища данных (Data Storages)*, *серверы (Servers)* и т.п. В большинстве случаев в качестве итогового целевого объекта и мотивации исследования подразумевают или рассматривают «большие» системы, состоящие из многочисленных элементов и со сложной топологией связей.

Добавление к словам «сетевая система» слова «управления» ставит на повестку дня вопрос: кто, где, в какой степени, на основании чего и каким образом выполняет функции управления. В основной части ответ дает архитектура системы, включающая распределение ролей и потоков информации. Основные варианты архитектуры, включая централизованную, децентрализованную и распределенную, были охарактеризованы во введении к книге, раздел В.1. Впрочем, эти варианты скорее обозначают принципы, используемые при организации системы, чем классы, к одному из которых обязательно и с определенностью можно отнести любую систему управления. На практике возможно и часто используется сочетание этих принципов.

Крупномасштабные (большие) децентрализованные распределенные системы управления являются предметом изучения довольно давно. Примерно на рубеже тысячелетий в эту тематику ворвались новые мотивы и изменились акценты в традиционных вопросах. Здесь в качестве конечной причины можно указать на революционные сдвиги в области микроэлектроники и телеком-

¹ *которые из каких-то соображений трактуются как единые и не дробятся на элементы*

муникаций, в ходе которых цифровые сетевые технологии стремительно приобретали статус ключевого метода реализации связи между элементами сетевой системы управления. Этот метод отмечен многими достоинствами и предоставил путь решения ряда серьезных проблем. Так, на определенном этапе развития количество линий связи между элементами многих технически сложных систем (например, современного автомобиля, самолета и т.п.) достигло столь высоких значений, что при традиционном методе реализации каждой линии отдельной металлической жилой общая масса проволоки доходила бы до сотен килограммов, что помимо прямого негативного эффекта создавало бы проблемы с поиском обрывов в массе проводов и доступом к ним и отвлекало заметные объемы для своего размещения.

Однако, предоставляя решение подобных и многих других проблем, сетевые технологии выставили счет за свои услуги. В частности, они практикуют совместное использование многими клиентами общего коммуникационного ресурса, например, физической линии связи, хранилища данных, процессора и т.п. Это подразумевает режим конкуренции за ресурс и потенциальную невозможность постоянного полного доступа к нему каждого отдельного пользователя. Конечный итог подобных обстоятельств на стороне пользователей может проявиться в виде нерегулярных и труднопредсказуемых задержек в передаче данных, потерь пакетов и их искажений, а также ограничений на количество информации, которое можно передать за определенный период времени. Если ресурсы коммуникационной сети, сами по себе весьма значительные, делятся между не менее значительным количеством пар пользователей, отмеченные негативные эффекты могут проявиться в степени, существенной для решения задач управления. Впрочем, то же самое может иметь место и в иных сценариях и в силу иных причин. В их числе, к примеру, особенности физической среды передачи информации; например, качественная беспроводная связь под водой остается сложной проблемой. В качестве другого примера укажем соображения скрытности в сценариях, когда интенсивность радиосвязи между чле-

нами многоагентного робототехнического комплекса желательно свести до минимального уровня, ниже которого совместное решение поставленной общей задачи уже просто невозможно.

Управление через *коммуникационные сети* (каналы связи) – раздел теории *сетевых систем управления* (*Networked Control Systems*), сфокусированный на решении вопросов синтеза и анализа алгоритма управления с учетом и в рамках ограничений и неидеальностей в передаче информации между элементами системы. Он также переступает через традиционное взаимное апатичное отношение теории управления и теории передачи информации, предлагая решать, частично вынужденно и в силу логики предмета, ряд относящихся к этим дисциплинам вопросов не раздельно друг от друга, а совместно и во взаимосвязи. Для теории управления это оказалось сопряжено, в частности, с вторжением понятий, аппарата и методов теории информации в постановки многих традиционных задач, в результате чего они приобрели новое содержание.

Например, традиционный для теории управления вопрос о выборе коэффициента усиления в контуре обратной связи для стабилизации неустойчивого объекта приобретает необычную для классической теории форму: какое минимальное количество информации (в битах) необходимо передавать по контуру обратной связи в единицу времени, чтобы стабилизация оказалась возможна в принципе, то есть при максимально «умном» как на протяжении передаваемых битов содержанием, так и их использовании. Соответственно, следующий вопрос: какую именно информацию следует отобрать для передачи в рамках имеющегося и, возможно, жесткого лимита (измеряемого в битах) и как этой информацией следует воспользоваться на принимающем конце канала при генерации управляющего воздействия, чтобы добиться стабилизации.

На передающем конце контура обратной связи обычно имеется доступ к показаниям датчиков, выражаемых вещественными числами, то есть в теории бесконечным, а на практике, возможно, большим числом битов, намного превышающим лимит

канала. Соответственно, процедуру селекции передаваемых битов можно рассматривать как *квантование* непрерывного сигнала по уровню, как преобразование непрерывного сигнала в дискретный. С течением времени эту процедуру приходится повторять. При отсутствии ограничений канала связи по нему на вход регулятора можно подать текущие показания датчиков в полном объеме. Однако при наличии ограничений на количество битов естественна идея не передавать ту информацию, которую можно извлечь из предыдущих сообщений по модулю априорных знаний об объекте управления, например, в виде уравнений его динамики. Это приводит к идее *инкрементального квантования*: для экономии ресурсов канала связи на его передающем конце формируют скалярную или векторную величину, которую можно трактовать как инкремент (приращение) в знаниях о текущем состоянии системы, привнесенный текущим измерением в дополнение к тому, что можно было спрогнозировать на основании ранее переданных по каналу связи сообщений. Именно этот инкремент и готовят для передачи по каналу связи, подвергая его квантованию и затем кодированию в форму, воспринимаемую каналом связи.

Селекция передаваемой информации на основе квантования данных играет важную роль в обеспечении общей эффективности системы управления. Относительно простые схемы квантования, например неизменные во времени или равномерные, оказались не всегда адекватными уровню предлагаемого вызова. Это привело к разработке и широкому использованию неравномерных и динамически подстраиваемых схем. Пример стационарной неравномерной схемы предложен в [11], где шаг квантования ставится в зависимость от величины квантуемого сигнала так, что малые сигналы подвергаются более подробному квантованию. Другая форма неравномерности выражена в том, что для достижения максимальной эффективности (минимального числа передаваемых битов) требуется квантовать различные фазовые переменные с разной степенью подробности (на разное число уровней). В ясной и простой форме этот эффект проявляется для ли-

нейных диагоналируемых систем, где под «различными фазовыми переменными» следует понимать координаты в соответствующем базисе, причем «более неустойчивые» из них подвергаются более подробному квантованию. Идею многочисленных работ с использованием динамических схем квантования можно интерпретировать как адаптивную подстройку шага квантования к текущему «уровню невежества/осведомленности» устройства на принимающем конце канала относительно истинного состояния системы [10, 18, 19, 25]. Здесь типично использование двух режимов подстройки квантователя. Цель первого из них (*Zoom-Out*) можно трактовать как формирование грубой, но зато верной оценки состояния на принимающем конце канала связи, причем оценки, известной и на передающем конце. Здесь практикуется последовательное увеличение шага квантования, что при фиксированном числе уровней квантования по сути равносильно расширению области, подвергаемой квантованию. Процесс завершается в момент «захвата» состояния системы указанной областью, о чем передается специальное извещение по каналу связи с его передающего конца. Следующий режим (*Zoom-In*) связан с постепенным сокращением этой области и шага квантования. Алгоритм сокращения призван обеспечить сохранение «захвата». При нарушении последнего условия возвращается первый режим.

В теории информации кодирование данных для передачи по каналу связи, в частности помехоустойчивое кодирование, – одна из центральных тем, которая отмечена целым рядом глубоких результатов и эффективных методов. Эта тема неизбежна и актуальна и для вопросов управления через коммуникационные каналы. Достаточен ли багаж, накопленный классической теорией информации, для решения таких вопросов, или требуется поиск новых решений и методов? Например, можно ли ограничиться простым потреблением уже известных методов кодирования «общего назначения», или специфика задач управления требует принципиально новых решений? Некоторые сомнения в пользу второй из указанных альтернатив возникают уже при поверхностном анализе ситуации. Например, важную роль в классической теории

информации играет идея блочного кодирования. В общих чертах и в исходном виде она заключается в том, чтобы кодировать данные в форме пакетов, предназначенных для передачи не за один такт использования канала, а за несколько последовательных тактов в течение определенного периода времени. При этом неполная часть пакета не декодируема, соответственно, данные будут получены только в самом конце этого периода. Если такая схема используется в контуре обратной связи при решении, например, задачи стабилизации объекта, то оказывается, что контур обратной связи фактически разомкнут в течение упомянутого периода. Для неустойчивого объекта это чревато значительными, вплоть до неприемлемых, отклонениями от целевого режима, особенно если длительность периода подобной «задержки» велика. Однако многие результаты теории информации как раз апеллируют к использованию блочных кодов большой длины, в теории стремящейся к бесконечности.

В рассматриваемой области наиболее резкая оппозиция классическим подходам теории информации Шеннона представлена, по-видимому, работой [24] и сопутствующими публикациями тех же авторов. Они привели определенные свидетельства в пользу недостаточности как классического метода блочного кодирования, так и шенноновской концепции пропускной способности (емкости) зашумленного канала связи, а также предложили альтернативы, адекватные задачам управления; в части пропускной способности канала альтернатива названа «*Anytime Capacity*». (Авторы данного раздела затрудняются предложить изящный перевод на русский язык; информация к размышлению: *anytime* – «в любое время», *capacity* – «емкость, пропускная способность».) Вместе с тем имеется цикл работ, включающий в частности [18–21], где напротив, приведены свидетельства адекватности инструментария классической теории информации, включая метод блочного кодирования и классическую концепцию емкости канала, контексту, связанному с задачами управления. Этот разброс оценок связан с использованием различных, хотя и вполне традиционных для теории управления критериев при

оценке качества управления или наблюдения. Хотя в исследовании рассматриваемого вопроса на наш взгляд еще не наступило время подведения окончательных итогов, уже можно констатировать, что маневр на стороне теории управления существенно повлиял на итоговые заключения на стороне теории передачи информации. Это можно трактовать как симптом более высокой степени их единения в контексте управления через коммуникационные каналы.

Далее в данном разделе приведены некоторые подробности постановки и решения задач управления в условиях ограничений на битовую пропускную способность канала связи и в базовом случае системы простейшей архитектуры. Для более полного ознакомления с предметом, в частности, с исследованиями последствий задержек, искажений и потерь пакетов, асинхронизма различных элементов сетевой системы, нетривиальной топологии сети и других эффектов, релевантных сетевым системам управления, можно порекомендовать работы [1, 9, 12, 13, 17, 18, 23, 27–29].

2. Конфигурации сетевых систем управления

Особенностью задач управления и наблюдения в сетях динамических систем является то, что узлы, как правило, не управляются из единого центра, а принимают и реализуют решения самостоятельно, на основе доступной им информации. Такой способ поведения называется *агентным*, узлы-подсистемы называются *агентами*, а вся система – *мультиагентной*, см. раздел 3.2 и [6, 7, 17]. В связи с распространением этих систем возникают принципиально новые вопросы в области связи, обработки информации и управления, касающиеся взаимосвязи между операциями сети и качеством работы всей системы. В частности, для сетевых систем управления (ССУ) характерны дискретизация процессов по времени по уровню, запаздывание в контуре управления, и потери данных в каналах связи.

Выделяются следующие три конфигурации ССУ: *централизованная, децентрализованная и распределенная* [12].

При *централизованной (Centralized) конфигурации* результаты измерений на каждом датчике передаются на центральный управляющий компьютер, в котором вырабатываются управляющие сигналы, передаваемые на исполнительные устройства. Такая конфигурация может рассматриваться как ССУ с одним контуром обратной связи, где все измерения выполняются общим измерительным узлом, отправляются в одном пакете на устройство управления и, наконец, возвращаются к общему исполнительному узлу. Достоинством централизованной конфигурации является возможность оптимизации работы всей системы в целом, поскольку одному устройству управления передается вся доступная информация о поведении системы. Такой конфигурации, однако, присущи следующие недостатки: 1) регулятор подвержен влиянию отказов центрального компьютера; 2) высокая стоимость центрального компьютера с коммуникационными устройствами, собирающими данные от многих датчиков; 3) большая вычислительная нагрузка центрального процессора. Поэтому такая конфигурация имеет ограниченную область применения в современных системах управления, имеющих большое количество распределенных узлов измерения и обработки данных, таких, например, как летательные аппараты и производственные предприятия.

В *децентрализованной (Decentralized) конфигурации* каждый регулятор для принятия решения располагает только некоторой локальной информацией (см. также раздел 2.2). Следовательно, даже если вся система имеет общую цель управления, узлы распределенного регулятора не обмениваются информацией между собой. Такие ССУ при исследовании можно рассматривать как системы с несколькими контурами обратной связи. По сравнению с централизованной, такая конфигурация снижает вычислительную нагрузку и сложность синтеза регулятора, поскольку формирование локального управления производится локальными регуляторами. Основная проблема децентрализованной конфигурации заключается в том, что характеристики процесса управления могут оказаться неоптимальными из-за отсутствия информации о всем процессе у локальных регуляторов. Это может ограничить

область применения децентрализованной конфигурации, в которой большое количество узлов координируют свою деятельность через сеть связи.

ССУ в *распределенной (Distributed) конфигурации* известна как *распределенная сетевая система управления (РССУ)*, которая обладает двумя отличительными свойствами: 1) с использованием общей сети связи происходит обмен информацией о каждой подсистеме между компонентами системы (например, датчиками, регуляторами и исполнительными механизмами); 2) объект управления обычно состоит из большого количества простых взаимодействующих узлов (например, подсистем и агентов), которые могут быть физически распределены и связаны с другими, чтобы координировать свои задачи для достижения желаемой общей цели. Эти два свойства приводят к так называемому *кооперативному управлению* [6, 7]. В такой конфигурации происходит обмен информацией между всеми соседствующими регуляторами для получения дополнительных сведений об управляемом процессе. Благодаря этому распределенные регуляторы способны координировать свое поведение путем передачи/получения информации от других регуляторов в некоторой соседней области. Преимущества этой конфигурации включают модульность, масштабируемость и надежность. В связи с быстрым развитием и использованием интернета, встроенных систем, беспроводной связи и новых методов управления, РССУ приобретают все более важное значение как основа для критических инфраструктур распределенных транспортных сетей, распределенных электроэнергетических систем, интеллектуальных сетей, в дистанционной хирургии, в сотовой связи и телефонных сетях, промышленных и производственных системах, биологических сетях и управлении *движением групп (Flocking)*.

Несмотря на достоинства сетевых систем управления и их преимущество перед традиционными, им свойственны и недостатки, требующие значительного внимания при синтезе. Основные из них [13, 30]:

1. *Сетевое запаздывание*. Сюда входит запаздывание передачи данных от датчика к регулятору, от регулятора к исполнительным устройствам, а также вычислительные запаздывания в узлах датчика, регулятора и исполнительного механизма. Используются следующие четыре основных модели запаздывания: модель с постоянным запаздыванием, стохастическая модель вида некоррелированного процесса, модель цепи Маркова и скрытая модель Маркова. Если общее время запаздывания выше допустимого, то качество работы ССУ может снизиться, вплоть до потери работоспособности, появления аварийных ситуаций и разрушения оборудования [13].

2. *Стирание (Erasure) и искажение (Distortion) пакетов данных* в каналах связи. Такие факторы как перегруженность канала связи, совмещение или конфликт данных могут привести к искажению передаваемых данных, что является неотъемлемой проблемой большинства сетей связи. Обычно процесс потери данных моделируется как процесс Бернулли или как марковский процесс [14, 30].

3. *Ограниченная пропускная способность (Capacity) канала связи*. Ограничение скорости передачи данных между отдельными элементами систем по каналу связи оказывает существенное влияние на процессы получения информации (наблюдение) и управления в таких системах. При передаче данных через цифровую сеть связи непрерывная переменная преобразуется в дискретизированную по времени и по уровню. Это неизбежно приведет к потере информации из-за наличия ошибки квантования. Основная проблема ССУ состоит во влиянии ошибки квантования на качество процесса управления. Естественно предполагать, что чем меньшее число разрядов используется для квантования, тем больше будет указанная ошибка. Если она слишком велика, то регулятор не сможет выработать стабилизирующее управление. Таким образом, одно из направлений исследования квантования заключается в разработке квантователя, обеспечивающего устойчивость системы. Существование квантователя приводит к двум явлениям, а именно к насыщению и ухудшению

точности управления. Если сигнал превышает диапазон квантования, может возникнуть большая ошибка квантования, приводящая к нестабильной работе замкнутой системы, а при малых отклонениях от заданного значения ошибка квантования препятствует асимптотически точного регулирования. Задаче определения допустимых границ квантования по уровню и по времени, при которых обеспечение заданных целей функционирования в принципе осуществимо, а также разработке процедур квантования, наиболее полно реализующих имеющиеся возможности, в последнее десятилетие уделено значительное внимание [1, 2, 14, 15, 18, 23, 25, 26, 28, 30].

4. *Нарушение безопасности (скрытности)* при передаче данных, что особенно относится к беспроводной сети [30].

Ниже влияние квантования на функционирование ССУ рассмотрено подробнее.

3. Управление и оценивание при ограниченной скорости передачи данных

Задача синтеза систем управления при ограниченной пропускной способности каналов связи между отдельными компонентами близка к задачам построения цифровых систем с квантованием по уровню в том смысле, что для них можно выразить количество передаваемых данных между отдельными элементами системы в единицах количества информации. Но между ними имеются весьма существенные отличия [1, 2, 14, 18, 23]. Действительно, в системах с квантованием по уровню характеристика преобразователя (шаг квантования), как правило, фиксирована, в то время как при передаче данных по каналу связи между узлами сетевой системы единственным ограничением на кодирующее устройство является количество символов используемого алфавита. Функция кодирования может меняться во времени, завися от всех предшествующих измерений. Эта дополнительная степень свободы фундаментально меняет существо рассматриваемой задачи, так как устройство обработки данных (кодер) может эффективно выбирать подлежащие измерению величины путем

целенаправленного изменения функции кодирования. Кроме того, при передаче данных по каналу связи имеется запаздывание, величина которого растет линейно от количества разрядов кодовых слов. Следовательно, начиная с некоторого значения увеличение числа разрядов кодера может привести к снижению точности оценивания из-за устаревания переданных данных.

Рассмотрим системы управления и наблюдения (оценивания), содержащие цифровой канал связи. Структуры таких систем в обобщенном виде представлены на рис. 3.3.1 и 3.3.2.

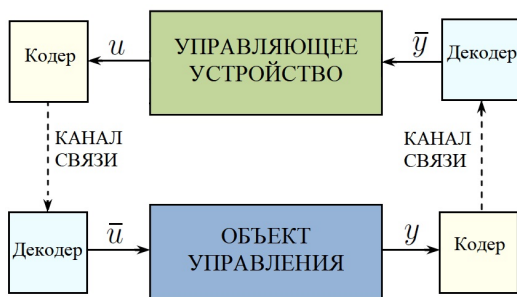


Рис. 3.3.1. Структура системы управления через цифровой канал связи

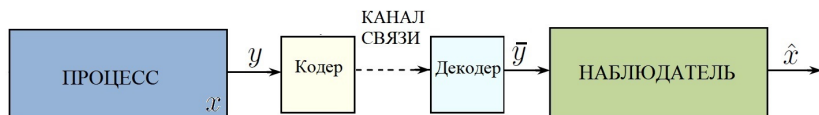


Рис. 3.3.2. Структура системы оценивания через цифровой канал связи

В рассматриваемых системах управления (рис. 3.3.1) измеренные датчиком значения выхода (*Measured Output*) объекта управления (*Plant*) $y(t)$ в дискретные моменты времени t_k ($k = 0, 1, \dots$) преобразуются кодирующим устройством (кодером) K (*Coder*) в символ конечного алфавита кодирования \mathbb{S} , передаваемый через цифровой канал связи (именуемый каналом

наблюдения) регулятору (*Regulator, Controller*). Регулятор вырабатывает управляющее воздействие $u(t)$ (*Control*) на основании переданных сообщений и как правило выполняет функцию декодера D (*Decoder*), предварительно трансформируя сообщения из формы, в которой она передавалась через канал связи, в форму, адекватную последующим вычислениям и преобразованиям. Примером может служить ситуация, когда регулятор пытается восстановить, насколько это возможно, показания датчиков $y(t)$, на основе которых были сформированы переданные по каналу сообщения. В этом случае практически неизбежна ошибка (*Error*) $\delta(t)$ ¹ вследствие того, что часть информации теряется из-за конечности алфавита \mathbb{S} и дискретизации процесса по времени. Управление $u(t)$ передается на исполнительные устройства (*Actuator*) для воздействия на объект управления (ОУ) также по каналу связи (каналу управления) с конечным алфавитом. Для реализации этой передачи также необходимо кодирование сигнала $u(t)$ в форму, воспринимаемую каналом связи (соответствующий кодер можно рассматривать как часть регулятора), и декодирование на другом конце канала в форму, воспринимаемую исполнительным устройством. Таким образом, в замкнутом контуре системы управления появляются дискретные по времени и по уровню нелинейные устройства, влияющие на поведение системы.

Также возможны и рассматриваются случаи, когда канал наблюдения/управления не накладывает существенных ограничений на процессы управления. Тогда из описанной модели связанные с этим каналом фрагменты удаляются и считается, что входной сигнал канала $y(t)/u(t)$ непосредственно воздействует на устройство на выходе канала.

В системах оценивания (рис. 3.3.2) требуется выработать оценку состояния $\hat{x}(t)$ протекающего в объекте процесса $x(t)$ по результатам измерений выхода объекта $y(t)$, переданных

¹ Погрешности измерений, преобразования и искажение сигнала при передаче по каналу связи приводят к дополнительным ошибкам. Кроме того, во многих задачах следует учитывать и запаздывание в канале связи.

по дискретному каналу. Устройство оценивания (*наблюдатель, Observer*) трансформирует переданные по каналу «дискретные» сообщения в оценку $\hat{x}(t)$. Отдельный интерес представляет в этой связи ситуация, когда оцениваемый процесс $x(t)$ известным образом зависит от некоторого измеряемого воздействия $r(t)$. Этими данными целесообразно воспользоваться для более точного оценивания (например – на базе калмановской фильтрации, см. [5], раздел 2.3, и раздел 1.1 данной книги), однако может возникнуть потребность в передаче по каналу связи и измерений $r(t)$, что приведет к дополнительным ошибкам квантования и увеличению загрузки канала.

Ограничение скорости передачи данных по каналу связи можно выразить в информационных терминах. Пусть алфавит \mathbb{S} имеет μ элементов. Тогда на каждом шаге $k = 0, 1, \dots$ по каналу можно передать не более

$$(1) \quad R = \log_2 \mu \text{ бит за шаг.}$$

Если передача осуществляется в дискретные моменты времени $t_k = kT_0$, где T_0 – *интервал квантования по времени (Sampling Interval)* или его усредненное значение, то скорость передачи данных в битах в секунду составляет

$$(2) \quad \bar{R} = T_0^{-1} \log_2 \mu \text{ бит/с.}$$

В этой связи говорят об «*информационных ограничениях*» (*Information Constraints*) в задачах управления и оценивания.

Таким образом, при наличии цифрового канала связи в системах управления и оценивания возникают задачи исследования его влияния на динамику и точность процессов, а также связанные с ними задачи синтеза, обеспечивающего наиболее полное использование имеющихся ресурсов при ограниченном объеме передаваемых по каналу данных. Эти задачи возникли одновременно с появлением цифровых систем управления (в 1950-х годах) и приобрели новое звучание в связи современным развитием мультikomпонентных систем управления и наблюдения, работающих через сети связи.

Квантование по уровню в системах цифровой обработки данных (далее используем также более узкий термин «*цифровые фильтры*», ЦФ) вызывает ошибки, связанные с [3, 8]:

- квантованием по уровню входного сигнала;
- квантованием коэффициентов ЦФ по конечному числу разрядов;
- квантованием результатов арифметических операций;
- появлением автоколебаний предельного цикла низкого уровня (эффекты «мертвой зоны»).
- появлением колебаний переполнения.

Таким образом, квантование сигнала вносит существенно нелинейные свойства в систему, характеризующиеся наличием *зоны нечувствительности, разрывов и насыщения* (связанного с переполнением разрядной сетки). Одновременно дискретизация сигналов является источником *гибридных* (непрерывно-дискретных) математических моделей. Строгий анализ влияния эффектов квантования по уровню и по времени является сложной задачей нелинейного анализа, которая в общем случае не имеет точного аналитического решения. В ранних работах по исследованию влияния эффекта квантования по уровню сигнала в цифровых системах управления устройство квантования («квантователь», *Quantizer*) обычно рассматривалось как источник независимого случайного процесса (шума), аддитивно воздействующего на систему. Это допущение позволяет существенно упростить исследование систем с квантованием, особенно для объектов управления, описываемых линейными моделями. Все эти факторы могут привести к возникновению автоколебательных и даже неустойчивых режимов в замкнутом контуре, поэтому их влияние нуждается в дополнительном анализе. При таком анализе отклоняется гипотеза о эквивалентном представлении квантователя как линейного звена с аддитивным ограниченным шумом на выходе и используется его нелинейная модель. Кроме того, рассматривается и возможность переполнения разрядной сетки квантователя, в результате чего в контур управления вносится насыщение [14, 30].

Чтобы получить обзримые результаты, применимые в инженерной практике, но дающие удовлетворительную точность, вводят различные упрощающие предположения.

Точный анализ нелинейных замкнутых систем такого вида возможен только в простейших частных случаях, поэтому для анализа прибегают к упрощенным приближенным методам. При анализе эффектов квантования входного сигнала в ЦФ ошибка квантования обычно представляется аддитивным, независимым от передаваемого сигнала случайным воздействием, после чего для получения характеристик ошибки преобразования сигнала ЦФ применяются методы статистического анализа [3]. Рассмотрим этот подход более подробно.

Пусть исходным сигналом для цифровой обработки является аналоговый сигнал $x(t)$ (другими словами – процесс *непрерывно-го времени* $t \in \mathbb{R}$). Будем считать также, что выборка сигнала (его *дискретизация по времени*) осуществляется с постоянным *интервалом квантования по времени (интервалом дискретности)* T_0 , то есть аналоговый процесс $x(t)$ преобразуется в *дискретную последовательность* x_k по формуле $x_k = x(t_k)$, где $t_k = kT_0$, $k = 0, 1, \dots$ – *дискретное время*.

Значения x_k подвергаются также и *квантованию по уровню*, образуя последовательность \bar{x}_k . Возможны различные способы квантования по уровню. Остановимся пока на наиболее употребительном – *равномерном квантовании*, при котором значения \bar{x}_k вычисляются округлением (или усечением) x_k с заданным числом разрядов. Тогда \bar{x}_k можно представить как

$$(3) \quad \bar{x}_k = x_k + e_k,$$

где e_k – аддитивная *ошибка квантования*. Значение e_k определяется *шагом квантования* δ – разностью между двумя соседними уровнями квантования. При *округлении* выполнено $|e| < \delta/2$, а при *усечении* имеет место $-\delta < e \leq 0$. Следует учитывать возможность насыщения (переполнения): если входной сигнал выходит за заданный *диапазон квантования* M , то выход квантователя определяется как $\bar{x} = M \cdot \text{sign } x$, и ошибка e_k по модулю может существенно превышать указанные выше значения.

Пример статической характеристики квантователя $\bar{x} = q(x)$ с округлением (для $\delta = 2^{-3}$, $M = 1$) показан на рис. 3.3.3, где также отражена ошибка квантования $e = x - \bar{x}$ в зависимости от

значения входного сигнала x .

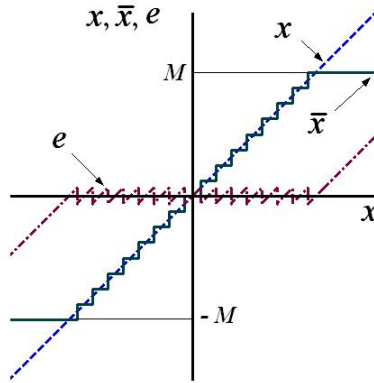


Рис. 3.3.3. Статическая характеристика квантователя и ошибка квантования

Распространенным подходом [1–3] является представление ошибки e_k как процесса, не зависящего от входа x_k . Тем самым нелинейная характеристика квантователя $\bar{x} = q(x)$ (рис. 3.3.3) заменяется линейной зависимостью $q(x) = x$, к выходному сигналу которой добавляется ограниченный шум e_k , представляющий ошибку квантования. Исходная и преобразованная схемы приведены на рис. 3.3.4.

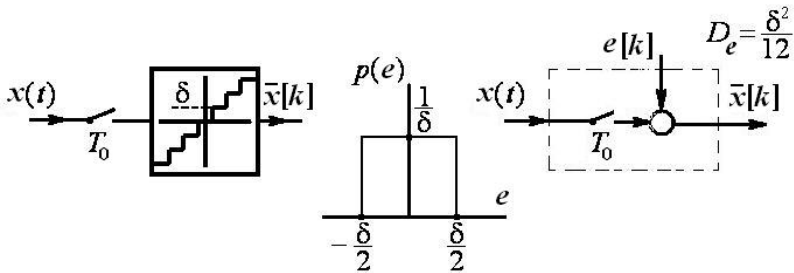


Рис. 3.3.4. Представление квантователя как источника аддитивного шума

Основным предположением для такого статистического анализа является взаимная независимость ошибок измерения и их некоррелированность между собой и полезным сигналом от выборки к выборке. Полученные этим методом теоретические результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, если амплитуда подлежащего квантованию сигнала достаточно велика (по отношению к шагу квантования δ). Для входных сигналов низкого уровня шумы квантования становятся коррелированными. Тогда в системе могут проявляться эффекты, вызванные нелинейным характером квантователя и сделанное выше допущение становится слишком грубым [1–3, 9, 14, 23]. К нелинейным эффектам в первую очередь относится возникновение автоколебательных режимов. Поэтому если исходная линейная система без квантования была асимптотически устойчивой, то при действии квантования асимптотическая устойчивость может пропасть. Если насыщения (переполнения) не наступает, то система сохраняет устойчивость (в смысле ограниченности траекторий). В противном случае может произойти потеря устойчивости.

4. Допустимые границы скорости передачи данных

Взаимосвязь между процессами управления и процессами передачи данных является одной из центральных тем в теории распределенных сетевых систем управления [10, 16, 18, 22–26, 28]. Такие классические вопросы как управляемость, наблюдаемость, устойчивость, стабилизируемость и многие другие по-прежнему в фокусе интереса. Однако ответы на них ищутся в условиях коммуникационных ограничений. Ограничения представляются наличием цифровых дискретных каналов между элементами сетевой системы. В простейшем случае одного незашумленного канала между датчиками и устройством управления/наблюдения на каждом шаге времени по нему, без искажений и запаздывания, может быть передано до R битов данных. Для каких значений R существует использующая рассматриваемый канал сетевая система, решающая поставленную задачу, например, формирующая достоверную оценку состояния или стабилизирующая систему?

Соображение «чем больше R , тем проще решить задачу» (подтвержденное строгим анализом) означает, что фактически это вопрос о наименьшем значении R , при котором могут быть удовлетворены поставленные цели. В определенных случаях на него был дан исчерпывающий ответ: найдено значение R_{crit} такое, что для утвердительного ответа необходимо и достаточно, чтобы $R > R_{crit}$. В некоторых других случаях дан практически исчерпывающий ответ: найдено значение R_{crit} такое, что для утвердительного ответа достаточно, чтобы $R > R_{crit}$, и необходимо, чтобы $R \geq R_{crit}$. Таким образом, достаточная граница отличается от необходимой заменой $>$ на \geq , такие границы называют *тесными* (*Tight*). В обоих рассмотренных случаях значение R_{crit} проводит точный (точечный) водораздел между ситуациями, когда поставленная задача разрешима и не разрешима соответственно. Впрочем, тесные границы удалось получить не для всех классов задач, и ситуация ненулевого зазора между найденными необходимой и достаточной границами также встречается.

Результаты, устанавливающие критическое значение R_{crit} скорости передачи данных через канал связи, получили название *теорем о скорости передачи данных* (*Data Rate Theorems*). Получена целая серия подобных результатов, отличающихся деталями постановки рассматриваемой задачи. Например, такие теоремы получены для задач построения достоверной оценки состояния, задач стабилизации и задач экспоненциальной стабилизации, для детерминированных и стохастических моделей объекта, динамических объектов с неопределенностями, например, в форме аддитивных возмущений, и объектов с детерминированным поведением, для совершенных каналов связи, передающих сообщения мгновенно и без искажений, и каналов, допускающих искажения и нерегулярные задержки в передаче данных, для случая одного дискретного канала и для случая системы сложной топологии с многими дискретными каналами, причем этот список далек от полной характеристики затронутой переменности. Впрочем, большая часть известных на данный момент теорем о скорости передачи данных касается линейных объектов. Выводы из этих

теорем имеют много общего и в разном контексте они подтверждают общий фундаментальный эффект. Охарактеризуем его на примере задачи экспоненциальной моментной стабилизируемости линейного объекта [22].

Рассмотрим линейный объект управления, функционирующий в дискретном времени:

$$(4) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^l$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния, измеряемого выхода (показания датчиков) и управления соответственно, A , B , C – постоянные вещественные матрицы соответствующих размеров. Считаем, что пара (A, B) управляема, а (C, A) наблюдаема (см. [5, раздел 1.3]). Начальное состояние x_0 – реализация случайного вектора \mathbf{X}_0 с конечным абсолютным моментом заданного порядка $r > 0$ и даже чуть большего порядка: $E\|\mathbf{X}_0\|^{r+\varepsilon} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.¹ Предполагаем, что распределение \mathbf{X}_0 абсолютно непрерывно, то есть корректно определена плотность распределения вероятности.

Датчик соединен с регулятором цифровым каналом связи, по которому на каждом шаге k можно передать (без искажений и за время одного шага) символ s_k , выбранный из конечного алфавита кодирования $\mathbb{Z}_\mu = \{0, 1, \dots, \mu - 1\}$. Скорость передачи данных по этому каналу равна $R = \log_2 \mu$ бит на шаг времени. Отправляемое по каналу связи сообщение s_k формируется кодером на основе всех доступных на момент k измерений, а также всех ранее отправленных сообщений. Иными словами,

$$(5) \quad s_k = \gamma_k(y_0, \dots, y_k, s_0, \dots, s_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь функция (правило) кодирования $\gamma_k : \{\mathbb{R}^{l \times (k+1)} \times \mathbb{Z}_\mu^k\} \rightarrow \mathbb{Z}_\mu$ подлежит построению, является частью конструируемой системы стабилизации и может зависеть от времени k . При формировании текущего управления u_k можно использовать все сообщения, полученные по каналу связи до этого момента:

$$(6) \quad u_k = \delta_k(s_0, \dots, s_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

¹ Здесь и далее E – знак математического ожидания.

Здесь отсутствие s_k в ряду аргументов функции объясняется ненулевым (единичным) временем передачи сообщения, а функция регулирования $\delta_k : \mathbb{Z}_\mu^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ также является частью системы стабилизации и подлежит построению. Сформированное этой функцией управление непосредственно действует на объект управления (4). (При $k = 0$ в связи с отсутствием полученных сообщений формула (6) меняется на $u_0 = \delta_0$, то есть функция регулирования является константой.)

Таким образом, алгоритм стабилизации образуется последовательностями функций кодирования и функций регулирования. Если такая система стабилизации задана, то по начальному состоянию x_0 однозначно формируется процесс $x_k, u_k, k \in \mathbb{Z}_+$ в объекте управления (4), причем x_k является реализацией некоторого случайного вектора \mathbf{X}_k . Скажем, что система стабилизации экспоненциально стабилизирует объект (4) с показателем $\varrho \in (0, 1)$, если

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho^{-kr} \mathbb{E} \|\mathbf{X}_k\|^r = 0.$$

Скажем, что система стабилизации экспоненциально стабилизирует объект (4) (не указывая при этом значение показателя), если существует такое $\varrho \in (0, 1)$, что система экспоненциально стабилизирует объект с этим показателем ϱ .

Теорема 1 (О скорости передачи данных). [22, теорема 1].

Пусть выполнены сделанные предположения и задано $\varrho \in (0, 1)$. Для существования системы стабилизации, которая экспоненциально стабилизирует объект (4) с показателем $\varrho > 0$ и использует рассматриваемый канал связи с пропускной способностью R битов в единицу времени, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$(8) \quad R > \sum_{j: |\lambda_j| \geq \varrho}^n \log_2 \left| \frac{\lambda_j}{\varrho} \right|.$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A , перечисленные с учетом их алгебраической кратности, и сумма по пустому множеству считается равной нулю.

Из этой теоремы в частности следует, что для существования системы стабилизации, которая экспоненциально стабилизирует

объект (4) и работает через рассматриваемый канал связи, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$(9) \quad R > \sum_{j:|\lambda_j| \geq 1}^n \log_2 |\lambda_j|.$$

Таким образом, сумма логарифмов в правой части неравенства и является критическим значением R_{crit} битовой скорости передачи данных через канал связи, которое разделяет принципиальную возможность и невозможность решения задачи стабилизации. Отметим, что это критическое значение не зависит от матриц B и C из (4) и определяется только динамическим оператором A неуправляемого ($u_k = 0$) объекта, точнее, его неустойчивой частью. В случае возможности стабилизации рассматриваемый результат дополнен конструктивным построением системы стабилизации.

Аналогичная по смыслу сумма логарифмов фигурирует в качестве R_{crit} в большинстве теорем о скорости передачи данных в случае линейной системы и дискретного времени. Рассмотрим, какой вид это выражение и связанные с ним условия стабилизируемости приобретают в случае непрерывного времени и линейного объекта управления

$$(10) \quad \dot{x}(x) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Хотя наши последующие рассуждения являются не более чем прикидочными, их выводы тем не менее независимо подкреплены строго доказанными результатами.

Рассмотрим ситуацию, когда управление $u(t)$ обновляется с шагом $T_0 > 0$, именно $u(t) \equiv u_k \forall t \in [kt_0, (k+1)T_0)$. Тогда удобно перейти от модели (10) к ее дискретизации по времени с шагом T_0 . Это приводит к модели вида (4) с матрицей $A = e^{AT_0}$. Её собственные числа $\lambda_j = e^{s_j T_0}$, где s_1, \dots, s_n – собственные числа матрицы A , перечисленные с учетом их алгебраической кратности. Соответственно, $|\lambda_j| = e^{\operatorname{Re}(s_j)T_0}$, где $\operatorname{Re}(s)$ – вещественная часть комплексного числа s . Дисконтирующий множитель ρ , указывающий, насколько должна уменьшиться ошибка стабилизации за один шаг длительностью T_0 , связан с желаемым показателем $\eta > 0$ экспоненциально-

го затухания $\sim e^{-\eta t}$ ошибки стабилизации в непрерывном времени через зависимость $\varrho = e^{-\eta T_0}$. Учтем также формулы (1) и (2), посредством которых связаны друг с другом скорости передачи данных за один дискретный шаг R и за единицу «физического» времени $\tilde{R} = T_0^{-1} \log_2 \mu$ бит/с. Тогда после элементарных преобразований условие (8) экспоненциальной стабилизируемости с показателем экспоненциального затухания η принимает вид

$$(11) \quad \tilde{R} > \log_2(e) \sum_{j: \operatorname{Re}(s_j) \geq -\eta}^n (\operatorname{Re}(s_j) + \eta),$$

а условие экспоненциальной стабилизируемости (9) – вид

$$(12) \quad \tilde{R} > \log_2(e) \sum_{j: \operatorname{Re}(s_j) \geq 0}^n \operatorname{Re}(s_j).$$

Как видим, найденные границы *не зависят* от интервала дискретности T_0 .

Для иллюстрации этого результата рассмотрим следующий пример. Пусть требуется стабилизировать в верхнем (неустойчивом) положении физический маятник, примером которого может служить космическая ракета-носитель, см. рис. 3.3.5.

Предполагая малость угла φ отклонения маятника от вертикали, опишем динамику маятника следующим линеаризованным уравнением:

$$(13) \quad \ddot{\varphi}(t) - a_2 \varphi(t) = b_0 u(t),$$

где $u(t)$ – момент внешних сил, параметр $a_2 = g l^{-1}$ (g – ускорение свободного падения, l – эквивалентная длина маятника). Силами вязкого трения (демпфированием) для простоты изложения пренебрегаем. Характеристический многочлен $D(s) = s^2 - a_2$ системы (13) имеет вещественные корни $s_{1,2} = \pm \sqrt{g l^{-1}}$.

Рассмотрим несколько вариантов. Пусть сначала $l = 0,5$ м и требуется лишь обеспечить стабилизацию объекта ($\eta = 0$). Тогда по приведенным формулам получим $s_{1,2} \pm 4,43$, $\tilde{R} = 6,4$ бит/с. Если выбрать $T_0 = 1$ с, то потребуется алфавит кодирования из $\mu \geq 84$ элементов, при $T_0 = 0,5$ с – из $\mu \geq 10$ элементов, а при $T_0 = 0,15$ с – из $\mu \geq 2$ (двоичное кодирование).

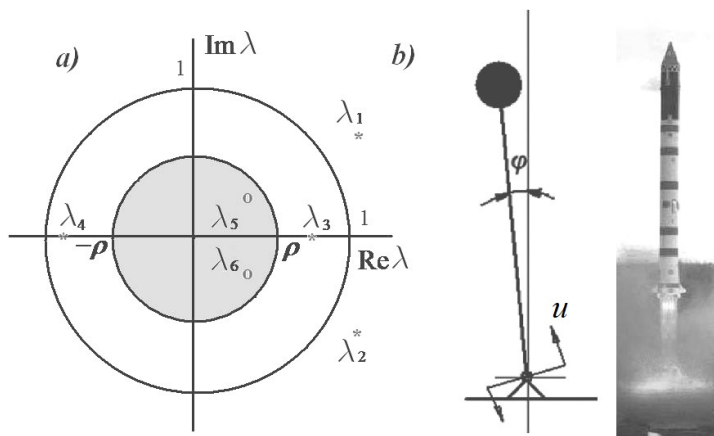


Рис. 3.3.5. а) границы: устойчивости $|\lambda| < 1$ и области со степенью устойчивости ρ ; б) обращенные маятники

Если теперь потребовать стабилизации за время около 1 с, $\eta = 3$, то получим с $\tilde{R} \geq 10,7$ бит/с, что при $T_0 = 1$ с дает $\mu \geq 1685$ уровней квантования, при $T_0 = 0,5$ с $\mu \geq 41$, а при $T_0 = 0,15$ с $\mu \geq 4$. Для стабилизации за указанное время «длинного» маятника с $l = 15$ м получим с $\tilde{R} \geq 5,5$ бит/с, что при $T_0 = 1$ с дает $\mu \geq 45$ элементов, при $T_0 = 0,5$ с $\mu \geq 7$, а при $T_0 = 0,15$ с $\mu \geq 2$ (двоичное кодирование).

Алгоритмы кодирования-декодирования и управления, обеспечивающие выполнение поставленной задачи для с \tilde{R} , сколь угодно мало превосходящего указанную границу, приведены в [22] при доказательстве достаточности условия (8). Эти алгоритмы сложны и малопригодны для использования в инженерной практике. Они опираются на технику *нестационарного кодирования*, представленную далее.

Следует отметить, что теорема о скорости передачи данных показывает лишь потребную нижнюю границу на R , при которой стабилизация (с заданной степенью устойчивости) осуществима *в принципе*. Полученные границы достаточно «мягкие»: обычно при решении подобных задач скорость передачи данных в десятки раз больше. Это связано со многими обстоятельствами практи-

ческого плана (например – необходимостью слежения за изменяющимся задающим воздействием или парирования возмущений). Кроме того, данный математический результат не учитывает возможности выхода состояния за допустимые границы в процессе стабилизации. Пусть, например, маятник имеет длину $l = 0,5$ м, а $T_0 = 1$ с. Тогда при нулевой начальной скорости угловое положение маятника (линеаризованная модель (13)) за интервал дискретности изменится в $\lambda_1 = e^{s_1 T_0} = 84$ раза, что вполне может оказаться вне рамок применимости модели (13) и вообще вне технически допустимых рамок.

С этой точки зрения теорему о скорости передачи данных правильнее рассматривать наподобие «закона сохранения» в физике: она показывает границы возможного, но при решении инженерных задач ее следует использовать с учетом особенностей конкретного вида систем.

5. Нестационарное кодирование

Нестационарное кодирование является популярным техническим приемом, использованным многими работами в области управления динамическими объектами и построения достоверной оценки их состояния через каналы связи ограниченной пропускной способности. Ключевые моменты этого приема изложим следуя [10] и рассматривая задачу стабилизации линейного стационарного детерминированного динамического объекта (10) с непрерывным временем и полным наблюдением: $y = x$.

Показания датчиков по-прежнему передаются регулятору по дискретному каналу связи с конечным алфавитом. Поэтому необходимо их предварительное кодирование, то есть трансформация в форму, воспринимаемую каналом связи. Это подразумевает необходимость *квантования* рассматриваемых данных, их преобразования в элементы определенного конечного множества. Квантование является довольно распространенной процедурой и применяется в разных областях и с разными конечными целями. Моделью такой процедуры может служить отображение $q(\cdot)$ из множества V квантуемых величин в конечное множество. Ес-

ли $V = \mathbb{R}$, один из простейших примеров процедуры квантования описывают следующие формулы:

$$(14) \quad q(x) = \begin{cases} M, & \text{если } x > (M + 1/2)\Delta, \\ \lfloor x/\Delta + 1/2 \rfloor, & \text{если } -(M + 1/2)\Delta < x \leq (M + 1/2)\Delta, \\ -M, & \text{если } x \leq -(M + 1/2)\Delta. \end{cases}$$

Здесь $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ – функция округления вниз, а натуральное число M и положительное число $\Delta > 0$ являются параметрами процедуры квантования. Выход устройства (*квантователя*), реализующего эту процедуру, принимает целые значения в диапазоне $-M, \dots, M$ общим числом (*уровней квантования*) $2M + 1$. С ростом/уменьшением x выход $q(x)$ квантователя (*квантованное значение*) нестрого возрастает/уменьшается, причем перестает изменяться после перехода абсолютной величины $|x|$ через пороговое значение $(M + 1/2)\Delta$ (*порог насыщения*). В этом смысле интервал $D := [-(M + 1/2)\Delta, (M + 1/2)\Delta]$ можно трактовать как область значений, фактически подвергаемых квантованию (*область квантования*). Эта область поделена на $2M + 1$ интервалов равной длины Δ (*шаг квантования, чувствительность квантователя*); всем величинам из общего интервала присваивается общее квантованное значение.

В случае квантования вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ одним из простейших решений является раздельное квантование его координат $q(x) = [q_1(x_1), \dots, q_n(x_n)]$. При использовании квантователей вида (14) возможен индивидуальный выбор параметров M_i и Δ_i для каждой координаты. Общее число уровней квантования при этом равно $\prod_{i=1}^n (2M_i + 1)$, а область квантования и ее ячейки, в пределах которых выход квантователя постоянен, представляют собой многомерные прямоугольные параллелепипеды. Если чувствительность по всем координатам одинакова: $\Delta_1 = \dots = \Delta_n =: \Delta$, параллелепипеды становятся кубами; тогда квантователь называют *равномерным*.

В простейших случаях параметры квантователя M, Δ фиксируют на весь период его использования. В работе [10] реализована идея специальной адаптивной динамической подстройки чувствительности Δ квантователя в процессе работы системы стаби-

лизации, причем подстройка осуществляется по принципу обратной связи исходя из анализа текущей ситуации. При этом число уровней квантования фиксировано, так как имеется в виду его соотношение с возможностями (точнее, с алфавитом) используемого дискретного канала связи. В результате подстройка чувствительности Δ равносильна подстройке области квантования D , которая также меняется во времени. Именно такой подход позволяет достичь асимптотической стабилизации состояния равновесия системы, то есть устремить ошибку стабилизации к нулю. Более того, он позволяет сделать это при произвольном начальном состоянии, относительно которого у регулятора нет никакой априорной информации, даже в форме очень грубой оценки, а информация от датчиков обрезается до конечного числа битов в каждую единицу времени ввиду свойств канала. Вместе с тем далее, как и в [10], считаем, что по каналу сообщения передаются мгновенно и без искажений, а пропускная способность канала позволяет сообщить регулятору, какой из фиксированного числа M «кубов квантования» содержит состояние объекта в данный момент времени, если, конечно, это состояние лежит в области квантования и, значит, в одном из этих кубов.

В описываемом далее алгоритме изменения чувствительности квантователя можно обнаружить некоторые элементы сходства с процедурой изменения масштаба изображения (*Zooming*), применяемой в фотокамерах. Алгоритм имеет два режима, ассоциированных со значениями $z = \pm 1$ вспомогательной переменной z . Режим $z = -1$ является начальным, и в его рамках производится последовательное снижение чувствительности (как бы уменьшение масштаба изображения «*Zoom Out*»), то есть увеличение шага Δ и расширение области D квантования. При этом интенсивность расширения подбирают так, чтобы граница области D «отодвигалась» от начала координат быстрее, чем состояние объекта. Для этого на объект часто подают нулевое управление. Тогда $\dot{x} = Ax$, откуда $\|x(t)\| \leq e^{\|A\|t} \|x_0\|$. Поэтому если Δ увеличивать настолько быстро, что расстояние от упомянутой границы до начала координат растет экспоненциально с по-

казателем, превышающем $\|\mathcal{A}\|$, то независимо от начального значения этого расстояния и величины $\|x_0\|$ область $D(t)$ рано или поздно «захватит» состояние $x(t)$. Об этом передается сообщение по каналу связи, и система стабилизации переводится во второй режим $z = 1$. Если известна оценка сверху нормы $\|\mathcal{A}\|$, легко предложить простые алгоритмы увеличения Δ , гарантирующие достаточную для указанного захвата скорость роста Δ . В рамках первого режима по каналу связи сообщения не передаются, за исключением команды на переход $z = -1 \mapsto z = 1$.

В рамках второго режима чувствительность квантователя, напротив, последовательно уменьшается (как бы увеличивается масштаб изображения «Zoom In»), что приводит к сокращению области квантования D . При этом работу системы стабилизации организуют так, чтобы состояние объекта x не покидало эту область, что означает сохранение содержательности схемы квантования в отношении состояния. Информация о содержащем его кубе передается по каналу связи и на её основании регулятор вырабатывает управление, цель которого – переместить состояние ближе к началу координат. Гарантированная степень успеха в реализации этого намерения определяет предел возможного сокращения области D без потери состояния x . Алгоритмы увеличения Δ и формирования управления строят таким образом, чтобы состояние не «терялось» и при этом область D стягивалась в нулевое состояние $x = 0$. Это гарантирует сходимость к нулю ошибки стабилизации $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Такие алгоритмы существуют. Например, в [10] предложены алгоритмы, в которых система стабилизации совершает операции в дискретные моменты времени, кратные выбранному шагу $\tau > 0$, а замкнутая система, включающая линейный непрерывный объект и квантователь, описывается уравнениями

$$(15) \quad \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t, q(x(t)), \Delta(t)),$$

$$(16) \quad \Delta(t) = G(z \lfloor t/\tau \rfloor, q(x(\lfloor t/\tau \rfloor \tau), \Delta(\lfloor t/\tau \rfloor \tau)).$$

Здесь в обозначении квантователя подчеркнута его зависимость от шага квантования Δ включением Δ в число аргументов функции $q(\cdot)$, наряду с x . Поскольку правые части (15), (16) разрывны,

решения (15), (16) понимаются в смысле Филиппова (см., например, [4]).

В рассматриваемом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2. [10, теорема 1]. Пусть существует матрица K такая, что все собственные числа матрицы $A - BK$ имеют отрицательные вещественные части (то есть пара (A, B) стабилизируема [4]). Тогда имеются функция $G(\cdot)$ в (16) и $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что закон управления

$$(17) \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < k_0\tau, \\ -K\Delta(t)q(x(t)) & \text{иначе,} \end{cases}$$

обеспечивает при произвольном $x(0)$ и $\Delta(0) = 0$ асимптотическое стремление к нулю решений замкнутой системы (15)–(17).

Основная идея, благодаря которой обеспечивается асимптотическая устойчивость системы (15)–(17), состоит в итеративном уменьшении параметра чувствительности $\Delta = \Delta(t)$ умножением его на выбранный масштабирующий множитель (Scaling Factor) $0 < \Omega < 1$. Таким образом, на стадии увеличения масштаба уравнение (16) приводит к зависимости $\Delta(t) = \Omega^\nu \Delta(k_0\tau)$, где $(k_0 + \nu)\tau < t \leq (k_0 + \nu + 1)\tau$, $\nu = 1, 2, \dots$, см. рис. 3.3.6.

Множитель Ω и интервал квантования τ рассчитываются в зависимости от числа уровней квантования и максимального и минимального собственных чисел матрицы Q решения уравнения Ляпунова $(A - BK)^T Q + Q(A - BK) = -D$ с некоторой матрицей $D = D^T > 0$. Из доказательства теоремы следует, что сходимость $x(t) \rightarrow 0$ носит экспоненциальный характер. В начале процесса (на стадии уменьшения масштаба) параметр Δ должен расти, причем со скоростью, превышающей скорость расходимости собственных движений объекта, вызванной неустойчивостью матрицы A . Например, можно использовать закон $\Delta(t) = e^{2\|A\| \lceil t/\tau \rceil \tau}$.

Изложенный выше способ формирования $\Delta(t)$ в виде кусочно-постоянной (на интервалах длительностью τ) функции времени является реализацией так называемой логики переключений с выдержкой по времени (Dwell-Time Switching Logic) [1].

В [10] для систем дискретного времени рассматривается и другой подход, при котором $\Delta(t)$ изменяется каждый раз, когда $\|q(x)\|$ оказывается равной или меньше некоторого заданного уровня.

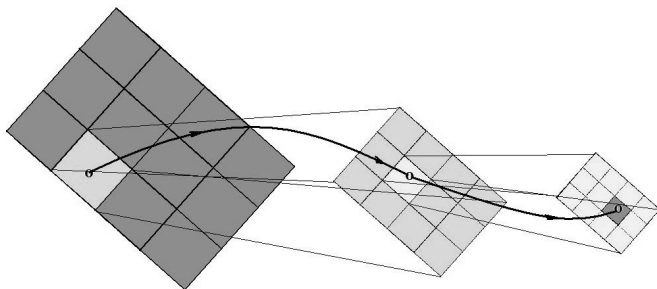


Рис. 3.3.6. Нестационарное кодирование. Процедура зуминга:

$$\Delta_{k+1} = \varrho \Delta_k, \quad 0 < \varrho < 1$$

Описанный способ стабилизации предполагает использование достаточно большого (и фиксированного) числа M . В [10] показано также, что обеспечить глобальную асимптотическую стабилизацию объекта (15) можно при существенно меньшем M (за счет выбора достаточно малого шага дискретности по времени τ). Результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 3. [10, теорема 2]. Пусть все собственные числа матрицы $A - BK$ имеют отрицательные вещественные части. Тогда существует такой закон управления

$$(18) \quad \Delta_i(t) = G_i(z, \lfloor t/\tau \rfloor, q(x(\lfloor t/\tau \rfloor \tau))), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(19) \quad u(t) = H(t - \lfloor t/\tau \rfloor \tau, q(x(\lfloor t/\tau \rfloor \tau))),$$

где $q(\cdot)$ – квантователь с чувствительностью $(\Delta_1(t), \dots, \Delta_n(t))$ и $M = 1$ (то есть с минимальным для квантователей вида (14) числом уровней), что при $\Delta(0) = 0$ и произвольном $x(0)$ траектории замкнутой системы (15), (18), (19) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Аналогичные результаты получены в [10] и для задач управления линейными дискретными объектами вида (4). Следует заметить, что для дискретного времени возникает дополнительное

условие: объект (4) не должен быть «слишком неустойчивым», как это видно из следующей теоремы.

Теорема 4. [10, теорема 4]. Пусть все собственные числа матрицы $A - BK$ по модулю не превосходят единицы и, кроме того, выполнено условие $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |A_{ij}| \right) \leq 2$. Тогда существует закон управления

$$(20) \quad \Delta_{i,k+1} = G_i(z, k, q(x_k)), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(21) \quad u_{k+1} = H(q(x_k)),$$

где $q(\cdot)$ – квантователь с чувствительностью $(\Delta_{1,k}, \dots, \Delta_{n,k})$ и $M = 1$, такой что при $\Delta_0 = 0$ и произвольном x_0 траектории замкнутой системы (4), (21), (21) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

В работе отмечено, что если чувствительность δ может иметь только конечное множество возможных значений, то можно достичь только *практической устойчивости*, а не глобальной асимптотической устойчивости.

В [10] рассмотрены также задачи *стабилизации по выходу*, в которых считается, что измеряться и использоваться в регуляторе может не весь вектор состояния x , а только выход объекта $y = Cx$, где C – некоторая $(p \times n)$ -матрица, $p < n$. Также в [10] обсуждается возможность перенесения полученных результатов на *нелинейные* системы.

6. Заключение

В середине 1990-х г. усилия исследователей были в значительной мере сконцентрированы на возможности стабилизации неустойчивого объекта системой управления, компоненты которой связаны через сеть ограниченной пропускной способности. Естественной отправной ситуацией является случай линейного объекта и простейшей сети, связывающей измерительное устройство (сенсоры, датчики), регулятор и исполнительное устройство двумя каналами: *каналом наблюдения и каналом управления*. По этим каналам передаются данные от сенсора регулятору и от регулятора к исполнительному устройству соответственно.

В данном разделе основной акцент сделан на вопросах, связанных с теоремой о скорости передачи данных. Эта теорема связывает центральные понятия теории информации и теории управления и говорит, что цель управления достигается, когда скорость передачи информации по каналам связи превосходит определяемое объектом управления критическое значение.

Получили развитие и другие направления, имеющие непосредственное отношение к управлению и оцениванию в сетевых системах и связанные, в том числе, с запаздыванием и искажением данных в канале связи, применением методов адаптивного и динамического кодирования. Эти важные результаты выпали за рамки настоящего рассмотрения. Заинтересованный читатель может ознакомиться с ними из монографий [6, 15, 18, 28], обзоров [1, 2, 7, 12–14, 17, 23, 27, 29, 30] и приведенных там ссылок.

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., МАТВЕЕВ А.С., ФРАДКОВ А.Л. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №4. – С. 34–99.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Управление и наблюдение через каналы связи с ограниченной пропускной способностью* // Гирроскопия и навигация. – 2009. – Т. 4, №67. – С. 103–114.
3. *Введение в цифровую фильтрацию* / Под ред. Р. Богнера и А. Константиноидиса. – М.: Мир, 1976. – 216 с.
4. ГЕЛИГ А.Х., ЛЕОНОВ Г.А., ЯКУБОВИЧ В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: Ленанд, 2019. – 504 с.
6. *Проблемы сетевого управления* // Серия «Компьютерные науки» / Под ред. А.Л. Фрадкова. – М.-Ижевск: «ИКИ», 2015. – 392 с.

7. ПРОСКУРНИКОВ А.В., ФРАДКОВ А.Л. *Задачи и методы сетевого управления* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №10. – С. 3–39.
8. ЦЫПКИН Я.З., ПОПКОВ Ю.С. *Теория нелинейных импульсных систем*. – М.: «Наука», 1973. – 414 с.
9. ANTSAKLIS P., BAILLIEUL J. *Special Issue: Technology of Networked Control Systems* // Proc. IEEE. – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 5–312.
10. BROCKETT R., LIBERZON D. *Quantized Feedback Stabilization of Linear Systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2000. – Vol. 45, No. 7. – P. 1279–1289.
11. ELIA N., MITTER S.K. *Stabilization of Linear Systems with Limited Information* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2001. – Vol. 44, No. 9. – P. 1384–1400.
12. GE X., YANG F., HAN Q.-L. *Distributed Networked Control Systems: A Brief Overview* // Information Sciences. – 2017. – Vol. 380. – P. 117–131.
13. GUPTA R., CHOW M.-Y. *Networked Control System: Overview and Research Trends* // IEEE Trans. Ind. Electron. – 2010. – Vol. 57, No. 7. – P. 2527–2535.
14. HESPANHA J., NAGHSHTABRIZI P., XU Y. *A Survey of Recent Results in Networked Control Systems* // Proc. IEEE. – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 138–162.
15. ISHII H., FRANCIS B.A. *Limited Data Rate in Control Systems with Networks*. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – 180 p.
16. LIBERZON D., HESPANHA J. *Stabilization of Nonlinear Systems with Limited Information Feedback* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2005. – Vol. 50, No. 6. – P. 910–915.
17. MAHMOUD M.S. *Control Over Lossy Communication Channel* // In: Control and Estimation Methods over Communication Networks. – Springer, Cham. Heidelberg: Springer Int. Publishing, 2014. – P. 127–228.

18. MATVEEV A., SAVKIN A. *Estimation and Control over Communication Networks*. – Boston: Birkhäuser, 2009. – 547 p.
19. MATVEEV A.S., SAVKIN A.V. *An Analogue of Shannon Information Theory for Detection and Stabilization via Noisy Discrete Communication Channels* // SIAM J. Control and Optimization. – 2007. – Vol. 46, No. 4. – P. 1323–1361.
20. MATVEEV A., SAVKIN A. *Comments on “Control over Noisy Channels” and Relevant Negative Results* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2005. – Vol. 50, No. 12. – P. 2105–2110.
21. MATVEEV A., SAVKIN A. *Shannon Zero Error Capacity in the Problems of State Estimation and Stabilization via Noisy Communication Channels* // Int. J. Control. – 2007. – Vol. 80, No. 2. – P. 241–255.
22. NAIR G., EVANS R. *Exponential Stabilisability of Finitedimensional Linear Systems with Limited Data Rates* // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 585–593.
23. NAIR G., FAGNANI F., ZAMPIERI S., EVANS R. *Feedback Control under Data Rate Constraints: An Overview* // Proc. IEEE. – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 108–137.
24. SAHAI A., MITTER S. *The Necessity and Sufficiency of Anytime Capacity for Stabilization of a Linear System over Noisy Communication Links – Part I: Scalar Systems* // IEEE Trans. Inform. Theory. – 2006. – Vol. 52, No. 8. – P. 3369–3395.
25. TATIKONDA S., MITTER S. *Control under Communication Constraints* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2004. – Vol. 49, No. 7. – P. 1056–1068.
26. WONG W.S., BROCKETT R.W. *Systems with Finite Communication Bandwidth Constraints – Part 1. State Estimation Problems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1997. – Vol. 42, No. 9. – P. 1294–1299.
27. YANG T. *Networked Control System: A Brief Survey* // IEEE Proc. Control Theory and Applications. – 2006. – Vol. 153, No. 4. – P. 403–412.

28. YÜKSEL S., BAŞAR T. *Stochastic Networked Control Systems. Stabilization and Optimization under Information Constraints. Systems & Control: Foundations & Applications.* – Boston: Birkhäuser, 2013. – 482 p.
29. ZHANG X.-M., HAN Q.-L., YU X. *Survey on Recent Advances in Networked Control Systems // IEEE Trans. Ind. Inform.* – 2016. – Vol. 12, No. 5. – P. 1740–1752.
30. XIA Y.-Q., GAO Y.-L., YAN L.-P., FU M.-Y. *Recent Progress in Networked Control Systems – A Survey // Int. J. Automation and Computing.* – 2015. – Vol. 12, No. 4. – P. 343–367.

ГЛАВА 4. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

4.В. ВВЕДЕНИЕ

Макаренко А.В.¹

Базовое определение *интеллектуального управления* звучит, на первый взгляд, достаточно просто: это класс систем (задач) управления, которые для достижения цели управления используют формальные подходы и методы искусственного интеллекта (ИИ). Сложности начинаются далее, при попытке раскрыть содержательный смысл последней категории. Ибо научная область *искусственного интеллекта* занимается разработкой и исследованием *искусственных интеллектуальных систем*, которые направлены на решение интеллектуальных – *творческих – задач* [3]. И в этом месте стройная цепь формализованных понятий даёт сбой, так как понятие *творчества*, строго говоря, неформализуемо.

Понятие ИИ в научный обиход ввёл Джон Маккарти в 1956 г. в своём программном выступлении на Дартмутском семинаре. По прошествии пятидесяти лет, в 2007 г. в своей статье [8] он же отмечает (цитата по Википедии): *«Проблема состоит в том, что пока мы не можем в целом определить, какие вычислительные процедуры мы хотим называть интеллектуальными. Мы понимаем некоторые механизмы интеллекта и не понимаем остальные. Поэтому под интеллектом в пределах этой науки понимается только вычислительная составляющая способности достигать целей в мире»*. Кстати, достижение цели – цели управления – основная задача систем управления (см. введение В.1).

Небесспорная, но достаточно информативная классификация интеллектуальных систем приведена на рис. 4.В.1; на нем видно, что подобные системы по свойствам распадаются на че-

¹ Андрей Викторович Макаренко, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; к.т.н., (avt.science@mail.ru).

тыре класса и два направления. Одно из которых – *сильный ИИ* – базируется на понятии *разум* – высший тип мыслительной (познавательной) деятельности, способность мыслить всеобще, способность анализа, абстрагирования и обобщения. Одна из особенностей разумной системы – прохождение *теста Тьюринга*. Рассмотрение подобных систем и подходов к их синтезу и анализу выходит за рамки данной книги.

ИИ	узкий	широкий	
слабый	Распознавание образов, Сложные логические игры	Управление сложными системами	Адаптивное поведение
сильный	Формулирование и доказательство новых матем. теорем	42? *	Разум
	Конкретная предметная область	Пересечение предметных областей	

* Дуглас Адамс «Путеводитель для путешественников автостопом по галактике».

Рис. 4.В.1. Классификация интеллектуальных систем

Второе направление – *слабый ИИ* – фактически является зонтичным понятием, включающим в себя в том числе и интеллектуальные системы управления, которые, по сути, направлены на реализацию сверхадаптивного управления, как закономерного развития идей управления адаптивного (см. раздел 1.2).

Отметим, что текущие успехи глубокого обучения фактически вывели проблематику построения определённых специализированных слабых интеллектуальных систем управления в ряд инженерных задач¹. На очереди комплексные слабые интел-

¹ Справедливости ради следует отметить, что в этой области есть ряд нерешённых проблем, что ограничивает применение подобных

лектуальные системы – позволяющие эффективно (оптимально?) и автономно управлять сложными системами. Но следует отметить, что в этих системах управления всё равно будет отсутствовать ряд моментов, присущих разумным системам: внутреннее целеполагание, рефлексия, нравственная сетка координат, по которой оцениваются те или иные действия, и т.п.¹. Так, академик С.Н. Васильев выделяет иерархию уровней управления, приведенную на рис. В.4.2.



Рис. В.4.2. Иерархия уровней управления (по С.Н. Васильеву)

Итак, искусственный интеллект как формальный базис для разработки и анализа систем интеллектуального управления² разделяется по применяемым математическим подходам на две объёмные ветви:

интеллектуальных систем управления к критическим объектам в полностью автоматическом режиме.

¹ Некоторые авторы подчёркивают эти ограничения, вводя в рассмотрение термин «интеллектуальные системы управления» [3].

² Читателю следует чётко разграничивать задачу создания искусственных интеллектуальных систем от близкой задачи использования математики и компьютеров для понимания человеческого (естественного) интеллекта.

Вычислительный интеллект опирается на эвристические алгоритмы, в качестве основного математического инструментария применяется машинное обучение по прецедентам (см. в том числе раздел 4.3).

*Логический интеллект*¹ основан на строгом логическом выводе, в качестве основного математического инструментария применяются *описательные логики* [2] и *онтологии*.

Между большинством представителей этих двух ветвей идут настоящие «священные войны» в части того, какая из дисциплин достойна быть «святым граалем» искусственного разума. Но, к счастью, есть и другая прослойка исследователей, которая понимает, что в действительности всё намного сложнее – см., например [4].

Алгоритмы машинного (глубокого) обучения обладают плохим пониманием смысла оперируемой информации, но при этом имеют хорошие обобщающие способности на уровне данных. Описательные логики (онтологии) обладают прямо противоположными свойствами: отлично понимают (кодируют) смысл, но имеют практически нулевую обобщающую способность.

В свою очередь описательные логики (онтологии) позволяют ввести однозначное кодирование: «один объект – одно понятие», но трудоёмки в своём ручном составлении. Алгоритмы машинного (глубокого) обучения, опять же, обладают прямо противоположными свойствами: имеют проблему множественности примеров, подвержены «иллюзиям восприятия», но обладают способностью к метаобучению – программа самостоятельно не учится, как лучше ей учиться.

Таким образом, внимательный читатель уже осознаёт, что если и удастся создать искусственные разумные системы в ближайшей перспективе (на существующих алгоритмических и технических решениях), то только за счёт конструктивного и всепроникающего объединения подходов и методов вычислительного и логического интеллектов. И на самом деле подобные процессы уже идут. В частности активно исследуются методы

¹ Кстати в этом направлении работали и Дж. Маккарти и Рина Дехтер – автор термина *Deep Learning* (глубокое обучение).

автоматического машинного построения развитых онтологических сетей из больших массивов слабоструктурированных данных [5, 7].

Исходя из вышеизложенного вполне закономерно приходим к рассмотрению понятия «*Большие данные*» (*Big Data*) – феномена, связанного с проблематикой эффективного хранения, доступа и обработки огромных массивов цифровых данных¹, как правило, слабоструктурированных, характеризующихся высокими темпами поступления² и существенной вариативностью по форматам, структуре и содержанию.

История появления этого понятия имеет в общем-то две составляющие. В теории всё началось в 2008 г. с интереса к феномену *Big Data* авторитетного научного журнала *Nature*³. На практике – в 2010 г., когда компания Google передала Apache Software Foundation права на использование технологии *MapReduce* в составе *Apache Hadoop*. Конечно, определённый фон существовал и до этих событий, но они оказали, в определённом смысле, решающее влияние. В течение последующих четырёх лет технология «*Больших данных*» была чуть ли не главным трендом индустрии цифровых данных: изучались как технологические аспекты, так и социальные и феноменологические, в том числе в контексте формирования новых рыночных направлений (бизнес-аналитика, бизнес-маркетинг, таргетирование рекламы, рекомендательные системы и т.п.). Затем произошёл закономерный спад – скорее трансформация интереса. Технологические проблемы были по большей части решены и перешли в разряд инженерных инфраструктурных вопросов. В контексте приложений технологии «*Больших данных*» (после того как улеглась

¹ Граница, с которой данные считаются «*Большими*», весьма вариативна и постоянно сдвигается в сторону больших значений. На данный момент усреднённая оценка – это 1 ПБ (1024 ТБ).

² Граница скорости проходит примерно на уровне возможностей современных SATA HDD, что составляет около 200 МБ/с.

³ *Community Cleverness Required // Nature. – 04 Sept. 2008. – Vol. 455. – P. 1.*

маркетинговая шумиха¹) стало ясно, что это не самоцель и не самостоятельная технология (в виде спасительной «серебряной пули»), а один из «кирпичиков» в деле построения комплексных систем обработки информации.

В настоящий момент к феномену Big Data как таковому сохраняется скорее исследовательский интерес в контексте ряда вопросов из области Computer Science, в том числе: функционирование системы в принципиально ненадёжной вычислительной среде²; эффективная миграция вычислительных ресурсов и процессов к данным³; эффективная организация доступа к слабо (сложно) структурированным данным⁴; разработка алгоритмов, имеющих малую вычислительную сложность, небольшие накладные расходы по дополнительной памяти, и допускающих высокую степень параллелизации⁵.

В прикладном аспекте «Большие данные» сейчас воспринимаются как стек технологий, который организует среду доступа и управления к большим вариативным наборам данных для решения ряда задач, так или иначе связанных с искусственными интеллектуальными системами. В первую очередь это разработка и функционирование различных аналитических систем на основе методов машинного обучения. Во-вторую – машинное построение развитых онтологических

¹ Внимание бизнеса переключилось на новую технологию Глубокого обучения (см. раздел 4.3).

² Распределённая вычислительная система, имеющая в своём составе более 1 000 узлов, как правило, перманентно находится в условиях частичных аппаратных отказов.

³ Классическая система обработки небольших объёмов информации, как правило, предполагает обратную ситуацию: данные перемещаются к вычислительным ресурсам, что в случае Big Data экономически и организационно неоправданно.

⁴ Классические SQL-запросы и операторы JOIN, реляционные таблицы очень неэффективны в случае, например, существенно разветвлённой древовидной структуры данных.

⁵ Алгоритмы должны иметь асимптотическую сложность не выше $n \log n$, требование по дополнительной памяти не более $n^{3/4}$ и иметь максимальную эффективность в смысле реализации требований закона Амдала.

сетей. Но есть ещё одна потенциальная область¹ – наполнение релевантной информацией «социальной среды» для обучения мультиконтекстных искусственных интеллектуальных систем.

На этом фоне следует отметить, что разработка собственно интеллектуальных (и даже интеллектных) систем управления несколько запаздывает. Во-первых, масса научных публикаций посвящена абсолютно неконструктивным «концептуальным наброскам» в стиле: «вот так должна выглядеть «правильная» ИИ-система управления», при этом должная теоретическая (математико-алгоритмическая) и инженерная проработка вопросов реализуемости, качества, устойчивости и эффективности предлагаемых «решений» полностью отсутствуют. Во-вторых, зачастую наблюдается другая крайность – когда в состав системы управления на основе «обыкновенного ПИД-регулятора» вводится финансово-экономический критерий качества регулирования и система на этом основании объявляется «интеллектуальной». То, что оба приведённых варианта являются некорректными, грамотный читатель, надеюсь, поймёт и без излишних объяснений.

В обсуждаемом контексте следует упомянуть ещё две научные области: *генетические алгоритмы* и *роевой интеллект*². Дело в том, что отдельные группы исследователей апеллируют к близости этих областей к соответствующим биологическим прототипам и тем самым пытаются выдать этим научным направлениям индульгенцию на единственно верный инструмент для решения тех или иных проблем разработки интеллектуальных систем управления³. На самом деле в своей основе эти две области ни более ни менее являются математическими методами глобальной нелинейной оптимизации. Алгоритмы, реализующие идеи из этих областей, обладают жёсткими целевыми функциями, имеют априорно заданную структуру и правила (иногда – вероятностные, но жёстко запрограммированные

¹ Возможно, она реализуется уже в ближайшем будущем.

² Некоторые авторы предпочитают название «эмерджентный интеллект».

³ Подобного рода заблуждение уже встречалось ранее с искусственными нейронными сетями.

на этапе синтеза системы) взаимодействия между элементами; таким образом, они могут своим внешним поведением демонстрировать свойства *адаптивности* и/или *самоорганизации*, но ни как не *интеллектуальности*¹.

В целом хочется предостеречь читателей от излишне завышенных ожиданий относительно текущих возможностей интеллектуальных систем управления², ибо за этими ожиданиями неизбежно последуют разочарования, а это, как показывает история, очень вредит развитию данного научного направления.

Таким образом, основными подходами к построению специализированных слабых интеллектуальных (интеллектных) систем управления являются следующие научные дисциплины: описательные логики и формальные языки [2, 4, 7]; глубокие нейронные сети [1]; нечёткие множества [9]; эволюционные вычисления и генетические алгоритмы [6]. Некоторые из перечисленных направлений представлены в разделах настоящей главы. Системы с переключениями (переключение может осуществляться «логическим интеллектом») рассматриваются в разделе 4.1, нечеткие системы управления – в разделе 4.2, искусственные нейронные сети – в разделе 4.3.

Литература

1. БЕНДЖИО И., ГУДФЕЛЛОУ Я., КУРВИЛЛЬ А. *Глубокое обучение*. - ДМК-Пресс, 2018. - 652 с.
2. ВАСИЛЬЕВ С.Н. *Формализация знаний и управление на основе позитивно образованных языков* // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2008. – №1. – С. 3–17.
3. РАССЕЛ С., НОРВИГ П. *Искусственный интеллект: современный подход*. – М.: Вильямс, 2006. – 1408 с.

¹ Ради справедливости следует отметить, что ровно эти же проблемы в существенной мере присущи и современному этапу развития искусственных нейронных сетей (см. заключение раздела 4.3).

² В смысле их разумности, или комплексной сверхадаптивности, или возможности функционирования при полной априорной неопределённости.

4. BESOLD R. et al. *Neural-Symbolic Learning and Reasoning: A Survey and Interpretation* // ArXiv: 1711.03902.
5. CASTELEIRO M. et al. *Ontology Learning with Deep Learning: a Case Study on Patient Safety Using PubMed* // 9th Int. Conf. Semantic Web Applications and Tools for Life Sciences. – Amsterdam, The Netherlands, 2016. – P. 1–10.
6. DeJONG K. *Evolutionary Computation: A Unified Approach*. – A Bradford Book, 2016. – 268 p.
7. HOHENECKER P., LUKASIEWICZ T. *Deep Learning for Ontology Reasoning* // ArXiv: 1705.10342.
8. McCARTHY J. *What is Artificial Intelligence?* – Nov.12, 2007. [<http://www-formal.stanford.edu/jmc/whatisai/whatisai.html>].
9. NGUYEN A., TANIGUCHI T., ECIOLAZA L., CAMPOS V., PALHARES R., SUGENO M. *Fuzzy Control Systems: Past, Present and Future* // IEEE Computational Intelligence. – 2019. – Vol. 14, No. 1. – P. 56–69.

4.1. СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Емельянова Ю.П.¹, Пакшин П.В.²

1. Введение

Многие системы, встречающиеся на практике, характеризуются неоднородной динамикой. Системы, в которых непрерывная динамика взаимодействует с дискретными событиями, обычно называют *гибридными*. Примерами могут служить термостат, включающий и выключающий обогрев; движение автомобиля с учетом переключения передач; рост и деление биологических клеток; переключение сервера между буферами в сети массового обслуживания. Гибридные системы представляют собой относительно новую, активно развивающуюся область современных исследований. Эта область содержит интересные теоретические проблемы, решение которых важно для многих реальных приложений. Из-за своего междисциплинарного характера она привлекает исследователей различного профиля, в первую очередь специалистов по теории управления, компьютерным наукам и прикладной математике. Имеется ряд хороших обзоров и монографий, из которых в первую очередь можно рекомендовать [18, 21, 35].

В широком классе прикладных задач дискретные события представляют собой просто переключения непрерывной динамики из определенного класса: детерминированные или случайные, зависящие от состояния системы или нет и т.п. Такие системы называются *системами с переключениями*. Кроме того, что они представляют интерес сами по себе, они могут рассматриваться как абстракции более высокого уровня гибридных систем. Приведем ряд характерных примеров [35].

¹Юлия Павловна Емельянова, Арзамасский политехнический институт НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Арзамас; к.ф.-м.н., доцент (emelianovajulia@gmail.com).

²Павел Владимирович Пакшин, Арзамасский политехнический институт НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Арзамас; д.ф.-м.н., профессор (pakshinpv@gmail.com).

Пример 1. *Автомобиль с ручной коробкой передач.* Движение автомобиля, который движется по фиксированной траектории, может характеризоваться двумя непрерывными переменными: скоростью v и положением s . Система имеет два входа: угол дроссельной заслонки u и включенную передачу g . Очевидно, что изменение скорости автомобиля в зависимости от угла дроссельной заслонки, зависит от включенной передачи. Поэтому динамику автомобиля можно рассматривать как гибридную по своей природе: в каждом режиме (включенная передача) динамика развивается непрерывно и может быть описана некоторым дифференциальным уравнением. Переходы между режимами инициируются вмешательством водителя в форме переключения передач и носят скачкообразный характер (см. рис. 4.1.1). •

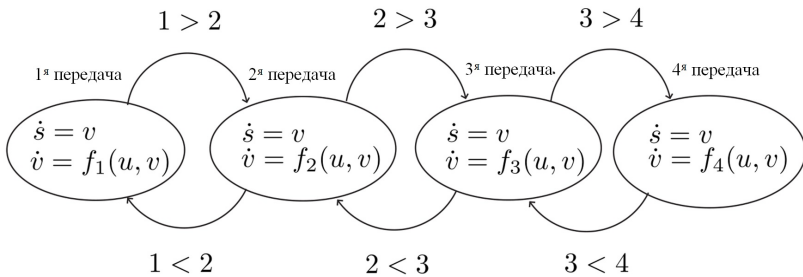


Рис. 4.1.1. Гибридная модель автомобиля с ручной коробкой передач

Пример 2. *Контроль загрузки сети.* Протокол управления передачей (TCP) является предпочтительным протоколом для сквозной доставки пакетов в Интернете. TCP – это протокол, основанный на подтверждениях. Пакеты отправляются из источников в пункты назначения, а пункты назначения информируют источники о пакетах, которые были успешно получены. Затем эта информация используется i -м источником для управления количеством неподтвержденных пакетов (принадлежащих источнику i) в сети в любой момент времени (w_i). Этот базовый механизм предоставляет источникам TCP, работающим в режиме предотвращения перегрузки, метод для определения доступной

пропускной способности сети и для контроля перегрузки в сети. После получения успешного подтверждения переменная w_i обновляется в соответствии с правилом $w_i \leftarrow w_i + a$, где a – некоторое положительное число, и затем в сеть подается новый пакет. Это механизм самосинхронизации TCP. Если w_i превышает целочисленное пороговое значение, тогда в сеть подается другой пакет и количество неподтвержденных пакетов увеличивается на один. TCP определяет из обнаружения потерянных пакетов, что сеть перегружена, и отвечает, уменьшая количество неподтвержденных пакетов в сети в соответствии с правилом $w_i \leftarrow \beta w_i$, где β – некоторое число от 0 до 1 (см. рис. 4.1.2). •

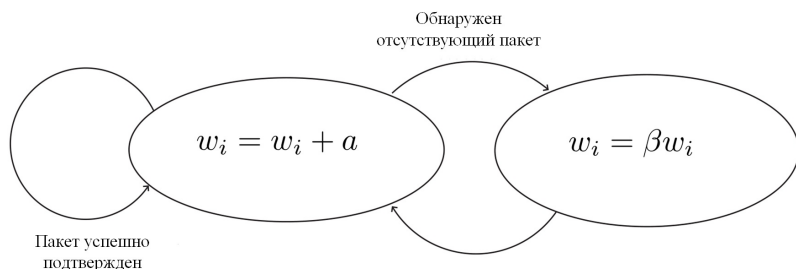


Рис. 4.1.2. Гибридная модель работы TCP в режиме предотвращения перегрузки

Из приведенных примеров ясно, что гибридные системы обеспечивают удобный и естественный метод моделирования широкого класса сложных динамических систем. К сожалению, хотя сама парадигма моделирования довольно проста, анализ остается весьма нетривиальной задачей. Основная трудность в их анализе заключается в том, что даже простые гибридные динамические системы с переключениями могут демонстрировать чрезвычайно сложное нелинейное поведение. Таким образом, хотя системы с переключениями и более общие гибридные системы обеспечивают привлекательную парадигму для моделирования множества практических ситуаций, анализ таких систем далеко не прост. Исследование систем с переключением породило ряд

сложных математических задач, которые, в ряде случаев, до сих пор не решены. Значительная часть этих задач связана с устойчивостью гибридных динамических систем [18, 19]. Опишем некоторые из них.

1. *Задача об устойчивости при произвольных переключениях.* Найти эффективно проверяемые условия устойчивости системы, состоящей из множества подсистем, между которыми происходят переключения по произвольному закону. Подавляющее большинство работ по этой задаче сосредоточено на получении условий существования общей (единой для всех) подсистем функции Ляпунова.

2. *Задача о времени ожидания.* Когда переключения между множеством составляющих подсистем происходят достаточно медленно, то вся система может оставаться устойчивой. При этом возникает вопрос о том, как быстро можно переключаться, все еще гарантируя устойчивость. Другими словами, какой минимальный промежуток времени может пройти между последовательными переключениями, чтобы система оставалась устойчивой? Указанный промежуток времени получил название *времени ожидания* (Dwell Time).

3. *Задача стабилизации.* В этой задаче требуется найти закон переключения между составляющими подсистемами, который обеспечивает устойчивость всей системы.

В литературе рассматривались также более специальные задачи, связанные с вычислительной сложностью условий устойчивости, с устойчивостью при периодических переключениях, с возможностью появления хаотических режимов за счет переключений и др. В данном разделе кратко рассмотрим лишь перечисленные задачи 1–3.

2. Определения и предварительные математические сведения

2.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ

В этом разделе и в дальнейшем главное внимание будет уделено исследованию следующей линейной системы с переключе-

ниями:

$$(1) \quad \Sigma_S : \dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\},$$

где \mathcal{A} – множество матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$ и $t \rightarrow A(t)$ – кусочно-постоянное отображение вещественной полуоси \mathbb{R}_+ в \mathcal{A} . Для каждого такого отображения существует соответствующая кусочно-постоянная функция σ , отображающая \mathbb{R}_+ в $\{1, \dots, m\}$ и такая, что $A(t) = A_{\sigma(t)}$ для всех $t \geq 0$. Это отображение σ обычно называют *переключающим сигналом*, а точки разрыва, t_1, t_2, \dots , $A(t)$ (или $\sigma(t)$) – *моментами переключений*. Множество переключающих сигналов обозначим через \mathcal{S} . Функция $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется решением (1), если она непрерывна, кусочно-непрерывно дифференцируема и существует переключающий сигнал σ такой, что

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

для всех t , кроме моментов переключения σ . По соглашению рассматриваются только непрерывные справа переключающие сигналы. Это не влияет на множество решений, поскольку любой другой выбор изменит дифференциальное уравнение только на множестве нулевой меры.

Для $1 \leq i \leq m$ i -я составляющая линейной системы с переключениями (1) имеет вид линейной стационарной системы

$$(2) \quad \Sigma_{A_i} : \dot{x} = A_i x.$$

Система (1) может рассматриваться как построенная путем переключения между составляющими линейными стационарными *подсистемами* $\Sigma_{A_1}, \dots, \Sigma_{A_m}$ с переключениями режимов, происходящими в моменты переключений с точно заданной схемой переключения, определяемой переключающим сигналом.

Для заданного переключающего сигнала $\sigma \in \mathcal{S}$ между любыми двумя последовательными моментами переключений система Σ_S является линейной стационарной системой. Таким образом, для каждого сигнала переключения σ и начального условия $x(0)$, существует единственное непрерывное, кусочно дифференцируемое решение $x(t)$, которое имеет вид [4]

$$(3) \quad x(t) = [e^{A(t_k)(t-t_k)} e^{A(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})} \dots e^{A(t_1)(t_2-t_1)} e^{A(0)(t_1)}] x(0),$$

где $t_1 < t_2 < \dots$ – последовательность моментов переключений, а t_k – наибольший момент переключения, меньший чем t .

Важно отметить, что теория устойчивости линейных систем с переключениями имеет тесную взаимосвязь с соответствующей теорией линейных *дифференциальных включений* [6]. Линейное дифференциальное включение, связанное с множеством $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, обозначается как

$$(4) \quad \dot{x}(t) \in \{Ax(t) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Решением этого включения является абсолютно непрерывная функция x , удовлетворяющая $x(t) \in \{Ax(t) \mid A \in \mathcal{A}\}$ почти всюду. С применением теоремы Филиппова [6] это эквивалентно тому, что существует такое измеримое отображение $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{A}$, что почти всюду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Таким образом, изучение дифференциального включения (4) сводится к расширению множества переключающих сигналов на класс измеримых функций. Рассмотрим выпуклую оболочку \mathcal{A} , которую обозначим $\text{conv} \mathcal{A}$, и выпуклое дифференциальное включение

$$(5) \quad \dot{x}(t) \in \{Ax(t) \mid A \in \text{conv} \mathcal{A}\}.$$

Множества решений последних трех систем оказываются тесно связанными. Чтобы описать эту связь точно, обозначим через $R_t^{\text{switch}}(x)$ множество точек, которые могут быть достигнуты из начального состояния x в момент времени t траекториями системы (1) [4], то есть

$$R_t^{\text{switch}}(x) := \{y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \sigma : y = x(t; x, \sigma)\}.$$

Аналогичным образом введем обозначение $\mathcal{R}_t^{\text{ldi}}(x)$, $\mathcal{R}_t^{\text{convldi}}(x)$ для достижимых множеств (4) и (5) соответственно; тогда для всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение

$$(6) \quad R_t^{\text{switch}}(x) \subset \mathcal{R}_t^{\text{ldi}}(x) \subset \mathcal{R}_t^{\text{convldi}}(x) = \text{cl} R_t^{\text{switch}}(x).$$

2.2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Во многих технических приложениях (см. пример с протоколом ТСП) представляет интерес изучение линейных систем с переключениями в дискретном времени. Линейная дискретная система с переключениями имеет вид

$$(7) \quad \sum_S : x(k+1) = A(k)x(k), \quad A(k) \in \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\},$$

где, как и прежде, \mathcal{A} является набором матриц в $\mathbb{R}^{n \times n}$, а $k \rightarrow A(k)$ является отображением вещественной полуоси в \mathcal{A} . Понятия переключающего сигнала, моментов переключений и составляющих систем определяются аналогично случаю с непрерывным временем. Существование решений уравнения (7) не вызывает затруднений. В случае дискретного времени анализ (7) эквивалентен анализу линейных дискретных включений

$$(8) \quad x(t+1) \in \{Ax(t) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

С другой стороны, набор решений значительно расширяется при переходе к выпуклому включению

$$(9) \quad x(t+1) \in \{Ax(t) \mid A \in \text{conv} \mathcal{A}\}.$$

Интересно отметить, что условия экспоненциальной устойчивости систем (7), (8) и (9), тем не менее, эквивалентны, что будет показано далее.

3. Устойчивость линейных систем при произвольных переключениях

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Как обычно, будем рассматривать устойчивость состояния равновесия в начале координат [4] и введем понятия устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости.

Определение 1. Начало координат является равномерно устойчивым состоянием равновесия системы \sum_S , если для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторое $\delta > 0$ такое, что при $\|x(0)\| < \delta$ для всех решений $x(t)$ системы при $t \geq 0$ выполняется условие $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Определение 2. Начало координат является равномерно экспоненциально устойчивым состоянием равновесия системы \sum_S ,

если существуют действительные постоянные $M \geq 1$, $\beta > 0$ такие, что

$$(10) \quad \|x(t)\| \leq M e^{-\beta t} \|x(0)\|$$

при $t \geq 0$ для всех решений $x(t)$ из \sum_S .

Допуская некоторую вольность, часто при условиях приведенных определений говорят об устойчивости или экспоненциальной устойчивости самой системы \sum_S .

При рассмотрении вопроса об экспоненциальной устойчивости при произвольном переключении необходимо предположить, что матрицы A_1, \dots, A_m в множестве \mathcal{A} все являются гурвицевыми (все их собственные значения лежат в открытой левой половине комплексной плоскости), обеспечивая тем самым экспоненциальную устойчивость каждой из составляющих линейной стационарной системы. При этом, как известно [4], для каждой из подсистем существует функция Ляпунова. Если устойчивость каждой из подсистем (1) гарантируется одной и той же функцией Ляпунова, говорят, что эта система имеет *общую функцию Ляпунова*.

Задача анализа устойчивости при произвольных переключениях состоит в получении проверяемых условий на матрицы в \mathcal{A} , которые гарантируют экспоненциальную устойчивость системы с переключениями (1) для любого переключающего сигнала.

Предложено множество подходов к изучению этой задачи, многие из которых основаны на построении общих квадратичных и неквадратичных функций Ляпунова для составляющих системы (1). В этом контексте было установлено, что *существование общей функции Ляпунова необходимо и достаточно для экспоненциальной устойчивости линейной системы с переключениями*. Получен ряд обратных теорем, доказывающие существование общих функций Ляпунова при предположении об экспоненциальной устойчивости.

А.П. Молчанов и Е.С. Пятницкий [5, 26] одними из первых установили, что равномерная экспоненциальная устойчивость системы (1) при произвольном переключении равносильна существованию общей функции Ляпунова $V(x)$ для составляющих

линейной стационарной системы. Теорема Молчанова – Пятницкого формулируется следующим образом.

Теорема 1. Система (1) равномерно экспоненциально устойчива для произвольных переключающих сигналов тогда и только тогда, когда существует строго выпуклая однородная степени 2 положительно определенная функция $V(x)$, вида

$$V(x) = x^T \mathcal{L}(x)x,$$

где $\mathcal{L}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathcal{L}(x)^T = \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(cx)$ для всех ненулевых $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, такая, что

$$\max_{y \in Ax} \frac{\partial V(x)}{\partial y} \leq -\gamma \|x\|^2$$

для некоторого $\gamma > 0$, где $Ax = \{A_1x, \dots, A_mx\}$, и

$$\frac{\partial V(x)}{\partial y} = \inf_{t>0} \frac{V(x + ty) - V(x)}{t}$$

– производная по направлению функции $V(x)$.

Приведем ряд важных замечаний.

1. В оригинальной работе [26] теорема 1 была доказана для линейного дифференциального включения. Ее справедливость в приведенной здесь формулировке для линейных систем с переключениями вида (1) следует из (6). Теорема показывает, что существование общей функции Ляпунова является не только достаточным, но и необходимым условием равномерной экспоненциальной устойчивости системы (1) при произвольных переключениях.

2. Теорема 1 устанавливает, что любая линейная система с переключениями, которая равномерно экспоненциально устойчива при произвольном переключении, должна иметь общую функцию Ляпунова, которая строго выпуклая и однородная степени 2.

3. Кроме того, в [26] было показано, что равномерная экспоненциальная устойчивость при произвольном переключении линейной системы с переключениями (1) эквивалентна существованию

- *кусочно-квадратичной* (выпуклой, но не обязательно непрерывно дифференцируемой) функции Ляпунова;
- *кусочно-линейной* (выпуклой, но не обязательно непрерывно дифференцируемой) общей функция Ляпунова;
- гладкой общей функции Ляпунова вида $V(x) = \sum_{i=1}^M (l_i^T x)^{2p}$ для некоторого целого числа $p > 0$ и векторов l_1, \dots, l_M в \mathbb{R}^n . Такая функция Ляпунова однородна и имеет порядок $2p$.

Для дискретных систем Н.Е. Барабанов [1] показал, что для экспоненциально устойчивого дискретного линейного включения всегда существует функция Ляпунова в виде нормы. В частности, из-за выпуклости норм это означает, что если множество \mathcal{A} порождает экспоненциально устойчивое дискретное линейное включение, то тем же самым свойством обладает и $\text{conv} \mathcal{A}$.

К настоящему времени получен целый ряд результатов более общего характера, которые здесь подробно затрагивать не будем и только отметим некоторые из них. Общая обратная теорема Ляпунова для нелинейных систем с изменяющимися во времени параметрами получена в [22]. Результаты [22] тесно связаны с последующими обратными теоремами Ляпунова для нелинейных систем с переключениями, представленными в [24] и [10].

3.2. ОБЩИЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Из предыдущего подраздела следует, что для линейных систем с переключениями общая функция Ляпунова не обязательно является квадратичной. В то же время эффективность математического аппарата, связанного с квадратичными функциями Ляпунова, стимулировала существенный объем исследований, направленных на построение общей квадратичной функции Ляпунова. Существование общей квадратичной функции Ляпунова для всех ее подсистем обеспечивает *квадратичную устойчивость* системы (1) с переключениями. Квадратичной устойчивостью называют экспоненциальную устойчивость, связанную с квадратичной функцией Ляпунова. Этому виду устойчивости посвящено множество работ в связи с его большим прикладным значением. Известно, что условия существования общей квадратичной функции Ляпунова можно выразить в терминах линейных матричных

неравенств (ЛМН) [4, 8], а именно: существует положительно определенная симметричная матрица P , $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, такая что одновременно выполняются неравенства

$$(11) \quad PA_i + A_i^T P \prec 0, \quad \forall i \in \mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$$

для случая непрерывного времени, или

$$(12) \quad A_i^T P A_i - P \prec 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}$$

для случая дискретного времени. Однако стандартные методы *внутренней точки* для ЛМН могут становиться неэффективными при больших N . Для этого случая в [20] был предложен интерактивный алгоритм градиентного спуска, который может сходиться к общей квадратичной функции Ляпунова за конечное число шагов. Кроме того, в этой работе показано, что скорость сходимости можно улучшить, вводя некоторую процедуру рандомизации, при этом сходимость понимается в вероятностном смысле (с вероятностью 1). Интересный метод предложен в [5, 16], где выбор квадратичной функции Ляпунова для дифференциальных включений сводится к нахождению седловой точки соответствующей функции и предлагается итеративный метод построения функции Ляпунова.

Метод ЛМН и другие численные методы не дают ни понимания того, почему общая квадратичная функция Ляпунова существует или не существует для данного набора линейных стационарных систем, ни понимания связи между существованием общей квадратичной функцией Ляпунова и динамикой линейных систем с переключениями. Поэтому определение конструктивных аналитических условий существования общей квадратичной функции Ляпунова в терминах матриц состояний подсистем остается в общем случае нерешенной задачей. Такие условия должны быть относительно легко проверяемыми и, что более важно, они могут дать понимание характера динамики отдельных подсистем, обеспечивающего квадратичную устойчивость при произвольных переключениях. В [31, 32] были рассмотрены линейные стационарные системы второго порядка с переключениями с двумя режимами (модами) и предложено необходимое и достаточное условие существования общей квадратич-

ной функции Ляпунова. Результаты [31, 32] основаны на устойчивости матричного пучка, образованного парой матриц состояний подсистем. Даны две матрицы A_1 и A_2 , матричный пучок $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ определяется как однопараметрическое семейство матриц $\gamma_\alpha(A_1, A_2) = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$, $\alpha \in [0, 1]$. Матричный пучок $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ называется гурвицевым, если его собственные значения находятся в открытой левой полуплоскости для всех $0 \leq \alpha \leq 1$. Результаты для пары линейных стационарных систем второго порядка, полученные в [31, 32, 33], можно выразить в виде следующей теоремы.

Теорема 2. [31, 32, 33]. Пусть A_1, A_2 – гурвицевы матрицы в $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) существует общая квадратичная функция Ляпунова для (1) с двумя подсистемами A_1 и A_2 ;
- 2) матричные пучки $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ и $\gamma_\alpha(A_1, A_2^{-1})$ гурвицевы;
- 3) матрицы $A_1 A_2$ и $A_1 A_2^{-1}$ не имеют отрицательных вещественных собственных значений.

Обобщение приведенного выше алгебраического условия на системы более высокой размерности оказывается затруднительным. В [17] были получены необходимые и достаточные алгебраические условия отсутствия общей квадратичной функции Ляпунова для систем с произвольными переключениями, состоящих из пары линейных стационарных систем третьего порядка. Для пары линейных стационарных систем n -го порядка необходимое условие существования общей квадратичной функции Ляпунова было получено в [31, 32].

Теорема 3. [32, 34]. Пусть A_1, A_2 – гурвицевы матрицы в $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Необходимым условием существования общей квадратичной функции Ляпунова является то, что матричные произведения $A_1[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2]$ и $A_1[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2]^{-1}$ не имеют отрицательных вещественных собственных значений для всех $0 \leq \alpha \leq 1$.

В качестве частного случая рассмотрим линейную стационарную систему с переключениями, состоящую из двух матриц, различающихся по рангу на единицу. В [34] было получено сле-

дующее необходимое и достаточное условие существования общей квадратичной функции Ляпунова.

Теорема 4. [34]. Пусть A_1, A_2 – гурвицевы матрицы в $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ с разницей рангов $\text{rank}(A_2 - A_1) = 1$. Необходимым и достаточным условием существования общей квадратичной функции Ляпунова системы с переключением (1) с двумя подсистемами A_1 и A_2 является то, что матричное произведение $A_1 A_2$ не имеет отрицательных вещественных собственных значений. Это эквивалентно тому, что матрица $A_1 + \gamma A_2$ невырождена для всех $\gamma \in [0, +\infty)$.

Для систем с переключениями, содержащих более двух подсистем, очевидно, что необходимым условием существования общей квадратичной функции Ляпунова является то, что каждая пара подсистем имеет общую квадратичную функцию Ляпунова. Оказывается, что существование общей квадратичной функции Ляпунова для каждой пары подсистем может также обеспечивать существование общей квадратичной функции Ляпунова для системы с переключениями в определенных особых случаях, например в положительных системах второго порядка [13]. К сожалению, в общем случае это неверно. Существование общей квадратичной функции Ляпунова для конечного числа линейных стационарных систем второго порядка было исследовано в [33]. Интересно отметить, что необходимым и достаточным условием существования общей квадратичной функции Ляпунова является то, что общая квадратичная функция Ляпунова существует для каждого набора из 3-х подсистем. Приведем точную формулировку этого результата.

Теорема 5. Пусть A_1, A_2, \dots, A_N – конечное число гурвицевых матриц в $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ при $a_{21i} \neq 0$ для всех i . Необходимым и достаточным условием существования общей квадратичной функции Ляпунова является то, что общая квадратичная функция Ляпунова существует для каждого набора из трех подсистем $\{A_i, A_j, A_k\}$, $i \neq j \neq k$ для всех $i, j, k \in \{1, \dots, N\}$.

Для общих случаев более высокого порядка и более двух режимов отсутствуют необходимые и достаточные условия суще-

ствования общей квадратичной функции Ляпунова для линейных стационарных систем с переключениями, и это остается открытой проблемой.

3.3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Условия существования общей квадратичной функции Ляпунова дают только достаточные условие устойчивости систем с произвольными переключениями. Известны примеры [18] (глава 2) систем, которые не имеют общей квадратичной функции Ляпунова, но экспоненциально устойчивы при произвольном переключении. В общем случае существование общей квадратичной функции Ляпунова – это только достаточное условие асимптотической устойчивости линейных систем с переключениями при произвольных переключающих сигналах, и оно может быть довольно консервативным.

В связи с консерватизмом общих квадратичных функций Ляпунова был рассмотрен менее консервативный класс функций Ляпунова, называемых *квадратичными функциями Ляпунова с переключениями* [9, 12]. Поскольку каждая подсистема устойчива, существует положительно определенная симметричная матрица P_i , которая является решением уравнения Ляпунова для каждой i -й подсистемы ($i \in \mathcal{J}$). Затем эти матрицы P_i объединяются на основе переключающих сигналов $\sigma(t)$ для построения глобальной функции Ляпунова следующего вида

$$(13) \quad V(t, x(t)) = x^T(t)P_{\sigma(t)}x(t).$$

Тогда проверка устойчивости для произвольно переключаемых линейных систем может быть выполнена путем решения некоторых линейных матричных неравенств [8]. Чтобы показать основную идею, представим следующий результат из [12].

Теорема 6. *Если существуют положительно определенные симметричные матрицы $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($P_i = P_i^T$) и матрицы $F_i, G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i \in \mathcal{J}$), удовлетворяющие неравенству*

$$(14) \quad \begin{bmatrix} A_i F_i^T + F_i A_i^T - P_i & A_i G_i - F_i \\ G_i^T A_i^T - F_i^T & P_j - G_i - G_i^T \end{bmatrix} < 0$$

для всех $i, j \in \mathcal{J}$, тогда дискретная линейная система с переключениями (7) асимптотически устойчива.

При некотором предварительном выборе вспомогательных матриц F_i и G_i линейные матричные неравенства (14) в теореме 6 можно заменить либо на

$$(15) \quad \begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0,$$

либо [9] на

$$(16) \quad \begin{bmatrix} -P_i & A_i G_i \\ G_i^T A_i^T & P_j - G_i - G_i^T \end{bmatrix} < 0.$$

Понятно, что когда $P_i = P_j$ для всех $i, j \in \mathcal{J}$, квадратичная функция Ляпунова с переключениями становится общей квадратичной функцией Ляпунова. Поэтому критерий устойчивости, основанный на квадратичной функции Ляпунова с переключениями, обобщает подход на основе общей квадратичной функции Ляпунова и обычно дает менее консервативные результаты. Однако следует еще раз отметить, что метод на основе квадратичных функций Ляпунова с переключениями дает только достаточные условия.

3.4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Приведем некоторые необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных систем с переключениями при произвольных сигналах переключения. Оказывается, что задача асимптотической устойчивости для линейных систем с произвольными переключениями эквивалентна робастной задаче асимптотической устойчивости для линейных стационарных систем с политопной моделью неопределенности [4, 8]. Из результатов [23] вытекает следующее соотношение эквивалентности между этими двумя задачами.

Теорема 7. Следующие утверждения эквивалентны:

1) линейная система с переключениями $x[k+1] = A_{\sigma(k)}x[k]$, где $A_{\sigma k} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, асимптотически устойчива при произвольных переключениях;

2) линейная нестационарная система $x[k+1] = A(k)x[k]$, где $A(k) \in \mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, \dots, A_N\}$, робастно асимптотически устойчива;

3) существует конечное целое число n такое, что

$$\|A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n}\| < 1$$

для всех n -кратных $A_{i_j} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, где $j = 1, 2, \dots, n$ и $\|\cdot\|$ обозначает ∞ -норму матрицы.

Изучение робастной устойчивости линейной нестационарной системы с политопными неопределенностями, которая имеет бесконечное число возможных режимов (мод), эквивалентно рассмотрению только конечного числа ее вершинных мод в системе с произвольными переключениями. Это хорошо известный результат, используемый в критериях робастной устойчивости [4, 8]. Следуя аналогичным рассуждениям, можно установить необходимые и достаточные алгебраические условия для непрерывной линейной системы с переключениями на основе результатов из [26] для равномерной асимптотической устойчивости дифференциальных и разностных включений:

Теорема 8. Следующие утверждения эквивалентны:

1) линейная система с переключениями

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(k)}x(t),$$

где $A_{\sigma(k)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, асимптотически устойчива при произвольном переключении;

2) линейная нестационарная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

где $A(t) \in \mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, робастно асимптотически устойчива;

3) существуют матрица полного ранга по столбцам $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, и семейство матриц $\{\bar{A}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i \in \mathcal{J}\}$ со строго отрицательной диагональю доминирующих строк, то есть для каждого \bar{A}_i , $i \in \mathcal{J}$ ее элементы удовлетворяют условию

$$\hat{a}_{kk} + \sum_{k \neq l} |\hat{a}_{kl}| < 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

такие, что выполняются матричные соотношения

$$LA_i = \bar{A}_i L.$$

К сожалению, применение приведенной выше теоремы остается затруднительным за счет сложности, в общем случае, численного нахождения матрицы. Тем не менее эта эквивалентность объединяет области исследований. Поэтому существующие результаты в области робастной устойчивости, которая интенсивно изучалась в течение последних десятилетий, могут быть непосредственно использованы для изучения систем с произвольным переключениями и наоборот.

4. Анализ устойчивости при ограниченных переключениях

Системы управления с переключаемой обратной связью могут не сохранять устойчивость при произвольном переключении, но могут быть устойчивыми при ограниченном наборе правил переключений (далее для краткости *ограниченные переключения*). Ограниченные переключения может возникнуть естественным образом из физических ограничений системы. Кроме того, правила переключения могут диктоваться логикой высшего уровня иерархии гибридной системы и в связи с этим представлять вполне определенный класс. С такими априорными знаниями о правилах переключения можно получить более сильные результаты по устойчивости данной системы, чем в случае произвольного переключения, где по сути используются условия наилучшего случая.

Ограничения на сигналы переключения могут быть либо в области времени (например, время ожидания, среднее время ожидания между переключающими сигналами, которые будут определены ниже), либо в пространстве состояний. Различие между управляемыми по времени сигналами переключения независимыми от состояния системы и сигналами зависимыми от состояния является значительным [14].

4.1. МЕДЛЕННЫЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Примеры в [19] и др., где расходящиеся траектории генерируются при переключении между двумя устойчивыми системами,

показывают, что неограниченность траекторий вызвана неспособностью системы поглотить увеличение энергии, вызванное переключением. В случае когда существует неустойчивая подсистема, что может быть вызвано неисправностью регулятора или датчика, и одна из них не переключается слишком долго или переключения на неустойчивую подсистему происходят слишком часто, устойчивость может быть потеряна. Поэтому ограничение сигнала переключения некоторыми подклассами является естественной задачей. Интуитивно понятно, что если достаточно долго оставаться в устойчивых режимах и переключаться реже, то можно компенсировать увеличение энергии, вызванное переключением или неустойчивым режимом, и обеспечить устойчивость. Эта идея *медленного переключения* получила строгое обоснование и связана с такими понятиями, как *время ожидания* и *среднее время ожидания переключения*, предложенными в [14, 15] и др.

Определение 3. Положительная постоянная τ_α называется *средним временем ожидания* для переключающего сигнала $\sigma(t)$, если

$$N_\sigma(t, \tau) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_\alpha}$$

выполняется для всех $t \geq \tau \geq 0$ и некоторого скаляра $N_0 \geq 0$, где $N_\sigma(t, \tau)$ обозначает число режимов переключений данного переключающего сигнала σ на интервале (t, τ) .

Здесь постоянная N_0 называется *границей вибрации*. Причиной появления переключающего сигнала, удовлетворяющего условию

$$N_\sigma(t, \tau) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_\alpha},$$

считается среднее время ожидания не меньше чем τ_α , поскольку

$$N_\sigma(t, \tau) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_\alpha} \Leftrightarrow \frac{t - \tau}{N_\sigma(t, \tau) - N_0} \geq \tau_\alpha.$$

Это означает, что в среднем «время ожидания» между любыми двумя последовательными переключениями не меньше чем τ_α . В [15] показано, что если все подсистемы экспоненциально устойчивы, то система с переключениями остается экспоненциально устойчивой при условии, что среднее время ожидания достаточно велико.

Теорема 9. [15]. *Предположим, что все подсистемы в линейной системе с переключениями экспоненциально устойчивы. Существует скаляр τ_α^* такой, что система с переключениями экспоненциально устойчива, если среднее время ожидания больше чем τ_α^* .*

Ясно, что сигналы переключения с ограниченным (фиксированным) временем ожидания также имеют ограниченное среднее время ожидания по определению. Следовательно, схема среднего времени ожидания характеризует больший класс устойчивых переключающих сигналов, чем схема фиксированного времени ожидания. Медленные переключения должны происходить так, чтобы система не проводила слишком много времени в неустойчивых подсистемах. Причиной исследования таких систем является то, что в некоторых случаях переключение на неустойчивые подсистемы становится неизбежным; так обстоит дело, например, когда происходит сбой или имеются потери пакетов при обмене данными.

4.2. МНОЖЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Для анализа устойчивости при ограниченных переключениях разработана техника *множественных функций Ляпунова*. Основная идея заключается в том, что здесь функции Ляпунова, которые могут соответствовать каждой отдельной подсистеме или определенной области в пространстве состояний, объединяются вместе для получения нетрадиционной функции Ляпунова. Нетрадиционность понимается в том смысле, что множественная функция Ляпунова может не быть монотонно убывающей вдоль траекторий состояний системы, может иметь разрывы и быть кусочно дифференцируемой. Причина введения таких функций состоит в том, что традиционные функции Ляпунова могут не существовать для систем с переключениями при ограниченных переключающих сигналах. Однако для таких случаев можно построить набор функций, подобных функциям Ляпунова (функций типа Ляпунова), которые требуют только неположительных производных Ли для определенных подсистем в определенных областях пространства состояний, вместо того чтобы быть отри-

цательными глобально. Теория множественных функций Ляпунова является, пожалуй, наиболее изученной областью в литературе по системам с переключениями и по этому направлению существует ряд хороших обзоров, например, [11, 25].

Есть несколько версий результатов по множественным функциям Ляпунова в литературе. Интуитивно понятный результат из [11, 21] проиллюстрирован на рис. 4.1.3, где функция типа Ляпунова уменьшается, когда соответствующая мода активна, и не увеличивает свое значение в каждый момент переключения.

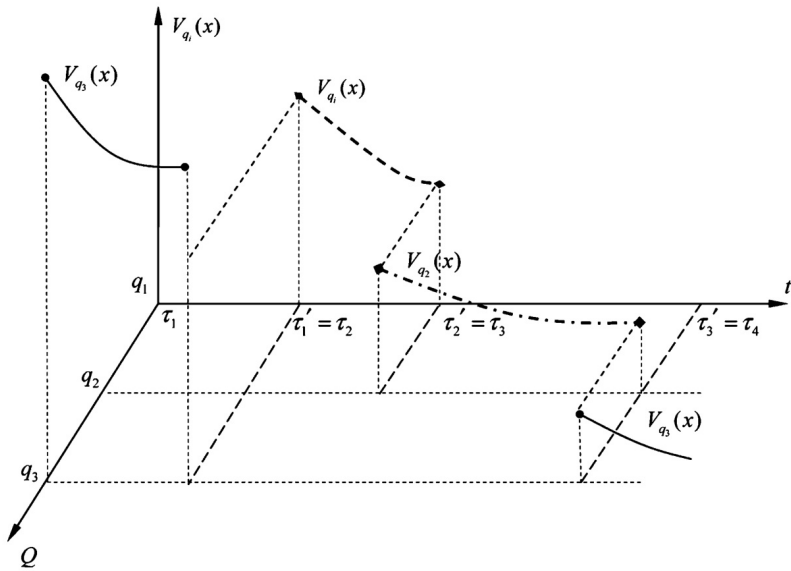


Рис. 4.1.3. [21] Система асимптотически устойчива, если значения функций типа Ляпунова, в точках переключения образуют убывающую последовательность

На самом деле можно получить менее консервативные результаты. Например, переключающие сигналы могут быть ограничены таким образом, что каждый раз, когда происходит выход (переключение) из определенной подсистемы, соответствующее ей значение функции типа Ляпунова меньше ее значения в предыдущий момент времени выхода, и тогда система с пере-

ключениями асимптотически устойчива. Другими словами, для каждой подсистемы соответствующие значения функции типа Ляпунова в моменты выхода образуют монотонно убывающую последовательность. Аналогично тенденция к снижению фиксируется значением функции типа Ляпунова в момент входа. Этот случай иллюстрируется на рис. 4.1.4.

Кроме того, функция типа Ляпунова может увеличивать свое значение в течение временного интервала, только если приращение ограничено определенным видом непрерывных функций, как показано на рис. 4.1.5. Все приведенные аргументы можно распространить на случай переключаемых систем с дискретным временем без существенных различий.

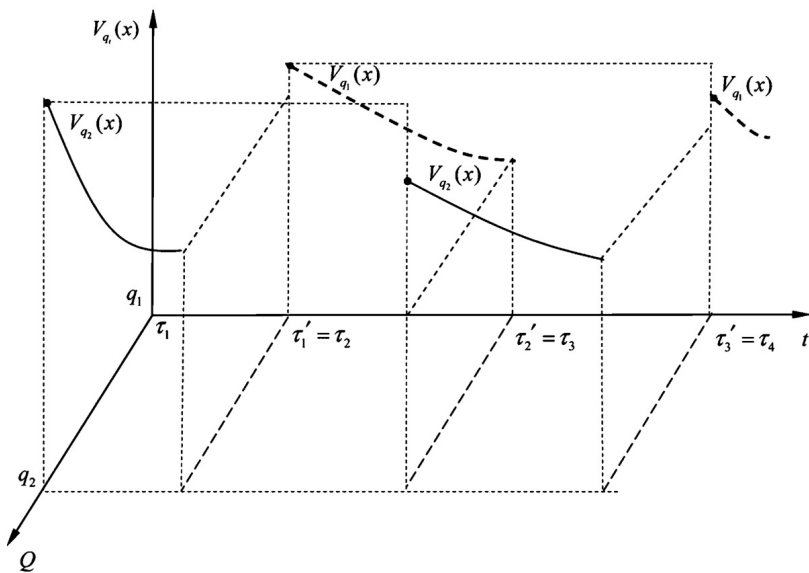


Рис. 4.1.4. [21] Система асимптотически устойчива, если для каждой подсистемы значения функции типа Ляпунова в точках выхода образуют монотонно убывающую последовательность

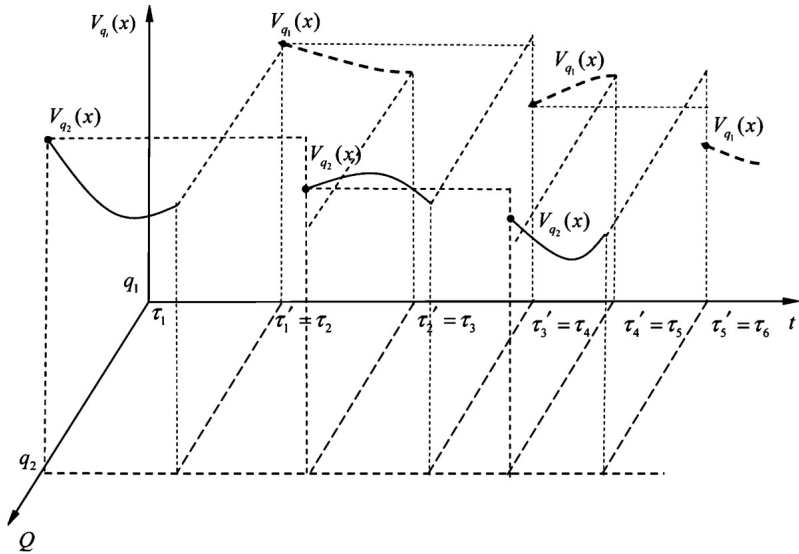


Рис. 4.1.5. [21] Система с переключениями может оставаться устойчивой, даже когда функция типа Ляпунова увеличивает свое значение в течение определенного периода

4.3. КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Ключевая задача построения множественных функций Ляпунова в переключаемых/гибридных системах заключается в том, как выбрать правильное семейство таких функций. Обычно это непростая задача. Однако если сосредоточиться на линейном случае, кусочно-квадратичная функция типа Ляпунова является удачным выбором, поскольку условия устойчивости в теоремах множественных функций Ляпунова можно сформулировать в терминах линейных матричных неравенств, для которых существует эффективное программное обеспечение, например совместимый с MATLAB пакет SeDuMi.

При рассмотрении линейной стационарной системы с переключениями (1) без предположения об устойчивости ее подсистем квадратичная функция Ляпунова в ее классическом понимании может не существовать. Однако можно ограничить поиск определенными областями пространства состояний $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, та-

кими что энергия i -й подсистемы уменьшается вдоль траекторий системы внутри этой области (за пределами Ω_i никаких требований не предъявляется). Предположим, что объединение этих областей охватывает все пространство состояний системы; тогда будет получен кластер функций Ляпунова и задача сводится к поиску функций типа Ляпунова, связанная Ω -область которых покрывает пространство состояний.

Предположим, что пространство состояний \mathbb{R}^n имеет область, заданную как $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$, и эти области Ω_i определены *априори* как ограничения возможных переключающих сигналов (в зависимости от состояния). Следуя [28] приведем условия на линейные матричные неравенства для существования квадратичных функций Ляпунова вида $V_i(x) = x^T P_i x$ для каждой области Ω_i . Такая функция должна удовлетворять следующим условиям:

1. *Условие 1.* Существуют постоянные скаляры $\beta_i \geq \alpha_i > 0$ такие, что выполняется

$$\alpha_i \|x\|^2 \leq V_i(x) \leq \beta_i \|x\|^2$$

для всех $x \in \Omega_i$.

Рассмотрим квадратичную функцию типа Ляпунова $V_i(x) = x^T P_i x$ и потребуем, чтобы для всех $x \in \Omega_i$ выполнялось неравенство

$$\alpha_i x^T I x \leq x^T P_i x \leq \beta_i x^T I x$$

или иначе

$$\begin{cases} x^T (\alpha_i I - P_i) x \leq 0, \\ x^T (\beta_i I - P_i) x \leq 0 \end{cases}$$

для всех $x \in \Omega_i$.

2. *Условие 2.* Для всех $x \in \Omega_i$ и $x \neq 0$, $\dot{V}(x) < 0$.

Отрицательность производной функции типа Ляпунова по траекториям подсистемы может быть выражена так: $\exists P_i, (P_i = P_i^T)$ такая, что

$$(17) \quad x^T (A_i^T P_i + A_i A_i) x < 0$$

для $x \in \Omega_i$.

3. *Условие переключения.* На основании теоремы о множественной функции Ляпунова из [11] для устойчивости также требуется, чтобы значения функций типа Ляпунова в момент переключения не увеличивались, что можно выразить в виде

$$x^T P_j x \leq x^T P_i x$$

для $x \in \Omega_{i,j} \subseteq \Omega_i \cap \Omega_j$. Область $\Omega_{i,j}$ обозначает состояния, где траектория проходит из области Ω_i в область Ω_j .

Обратим внимание, что все эти матричные неравенства ограничены в локальной области, такой как $x \in \Omega_i$ или $\Omega_{i,j}$. Используя S -процедуру [8], матричные неравенства с ограничениями можно заменить условиями без ограничений. Для использования S -процедуры области Ω_i и $\Omega_{i,j}$ необходимо описать в терминах квадратичных форм. Это всегда возможно, и техника получения квадратичных форм для описания гиперплоскостей, многогранников или более общих множеств описана в литературе [8]. Далее предположим, что каждая область уже имеет квадратичное представление или приближение, то есть

$$\Omega_i = \{x | x^T Q_i x \geq 0\},$$

и области $\Omega_{i,j}$ могут быть также выражены или аппроксимированы квадратичными формами

$$\Omega_{i,j} = \{x | x^T Q_{i,j} x \geq 0\}.$$

Тогда на основе S -процедуры указанные матричные неравенства могут быть преобразованы в неравенства без ограничений и справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. Система (1) экспоненциально устойчива, если существуют матрицы P_i ($P_i = P_i^T$) и скаляры $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu_i \geq 0$, $\nu_i \geq 0$, $\vartheta_i \geq 0$, $\eta_{i,j} \geq 0$ такие, что выполняются неравенства

$$(18) \quad \begin{cases} \alpha I + \mu_i Q_i \leq P_i \leq \beta I - \nu_i Q_i, \\ A_i^T P_i + P_i A_i + \vartheta_i Q_i \leq -I, \\ P_j + \eta_{i,j} Q_{i,j} \leq P_i. \end{cases}$$

Если указанные выше линейные матричные неравенства разрешимы, то система экспоненциально устойчива. Кроме того, для скорости сходимости справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-1/2\beta t} \|x_0\|,$$

где $x(t)$ – непрерывная траектория с начальным состоянием x_0 и константы α, β являются решениями линейных матричных неравенств (18). Аналогично получаются достаточные условия в форме линейных матричных неравенств для случая дискретного времени. Чтобы уменьшить возможную консервативность кусочно-квадратичных функций Ляпунова, был введен и исследован новый вид полиномиальных функций Ляпунова для анализа устойчивости переключаемых систем [27]. Вычисление таких полиномиальных функций Ляпунова может быть эффективно выполнено с использованием выпуклой оптимизации, основанной на разложении суммы квадратов многомерных полиномов.

5. Стабилизация систем с переключениями

В предыдущих разделах обсуждались условия устойчивости систем с переключениями при заданных переключающих сигналах, которые могут быть ограниченными или произвольными. Исследуемая проблема заключалась в том, при каких условиях (либо по динамике подсистем и/или по переключающим сигналам) система с переключениями устойчива. Это задача анализа устойчивости. Другой основной задачей для систем с переключениями является синтез *стабилизирующих переключающих сигналов* для заданного набора динамических систем – задача стабилизации систем с переключениями. Отметим специфику этой задачи, заключающуюся в том, что стабилизация обеспечивается за счет соответствующих переключений. Продемонстрируем это на простом примере [18]. Рассмотрим систему (1) при условии, что она состоит из двух подсистем с матрицами

$$(19) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим правило переключения условием

$$(20) \quad A_{\sigma(t)} = \begin{cases} A_1, & \text{если } x_1 x_2 \leq 0, \\ A_2, & \text{если } x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

Нетрудно непосредственно проверить, что в этом случае функция Ляпунова $V(x) = x^T x$ гарантирует глобальную асимптотическую устойчивость, которая здесь достигается исключительно за счет правила переключения, поскольку матрицы A_1 и A_2 не являются гурвицевыми. На рис. 4.1.6 представлена характерная фазовая траектория.

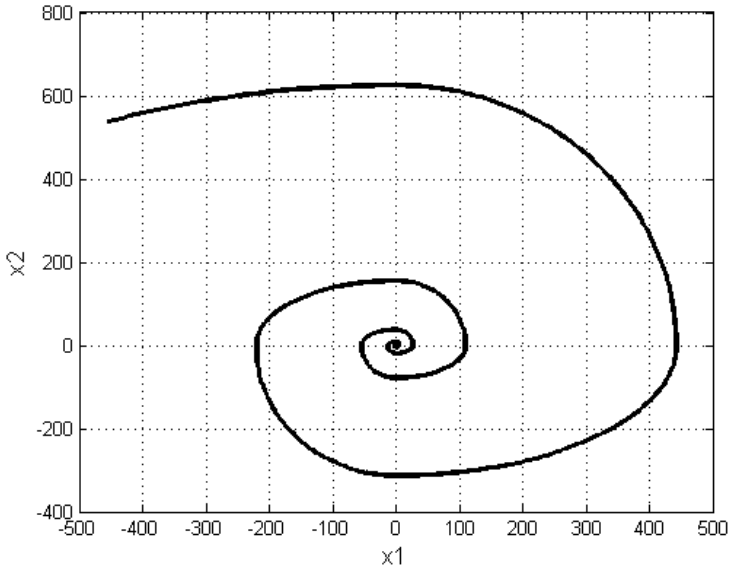


Рис. 4.1.6. Фазовая траектория системы (1) с матрицами подсистем (19) и правилом переключения (20)

5.1. КВАДРАТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В литературе по стабилизации систем с переключениями большая часть работ сосредоточена на квадратичной стабилизации для определенных классов систем. Система с переключениями называется *квадратично стабилизируемой*, когда существуют переключающие сигналы, которые стабилизируют систему с переключениями с квадратичной функцией Ляпунова $V(x) = x^T P x$.

Необходимое и достаточное условие квадратичной стабилизируемости для пары линейных стационарных систем состоит в существовании устойчивой выпуклой комбинации матриц двух подсистем. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11. [36]. Система с переключениями, содержащая две линейные стационарные подсистемы $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $i = 1, 2$, квадратично стабилизируема тогда и только тогда, когда пучок матриц $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ содержит устойчивую матрицу.

Обобщение более чем на две линейные стационарные подсистемы было предложено в [28] с использованием «стратегии минимальной проекции», то есть

$$(21) \quad \sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathcal{J}} x^T(t) P A_i x(t).$$

Теорема 12. [28]. Если существуют постоянные $\alpha_i \in [0, 1]$ и $\sum_{i \in \mathcal{J}} \alpha_i = 1$ такие, что матрица

$$A_\alpha = \sum_{i \in \mathcal{J}} \alpha_i A_i$$

устойчива, тогда стратегия минимального проекции (21) квадратично стабилизирует систему с переключениями.

Однако наличие устойчивой выпуклой комбинации матриц только достаточно для линейных стационарных систем с переключениями с более чем двумя модами. Необходимое и достаточное условие квадратичной стабилизируемости систем с переключаемым алгоритмом управления было получено в [30].

Теорема 13. [30]. Система с переключениями квадратично стабилизируема тогда и только тогда, когда существует положительно определенная вещественная симметричная матрица $P = P^T > 0$, такая что множество матриц $\{A_i P + P A_i^T\}$ строго полно, то есть для любого $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ существует $i \in \mathcal{J}$ такое, что $x^T (A_i P + P A_i^T) x < 0$. Кроме того, стабилизирующий переключающий сигнал может быть выбран как $\sigma(t) = \arg \min_i \{x^T(t) (A_i P + P A_i^T) x(t)\}$.

Аналогично для случая с дискретным временем необходимо и достаточно для квадратичной стабилизации проверить, существует ли положительная симметричная матрица P такая, что на-

бор матриц $\{A_i^T P A_i - P\}$ строго полон [30]. Очевидно, что существование выпуклой комбинации матриц состояний A_α автоматически удовлетворяет вышеуказанным строгим условиям полноты из-за выпуклости, тогда как обратное утверждение не является верным в общем случае. К сожалению, проверка строгой полноты набора матриц является NP-трудной задачей [30].

5.2. КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Согласно теореме 10, если существуют вещественные матрицы P_i ($P_i = P_i^T$) и скаляры $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu_i \geq 0$, $\nu_i \geq 0$, $\vartheta_i \geq 0$ и $\eta_{i,j} \geq 0$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \alpha I + \mu_i Q_i \leq P_i \leq \beta I - \nu_i Q_i, \\ A_i^T P_i + P_i A_i + \vartheta_i Q_i \leq -I, \\ P_j + \eta_{i,j} Q_{i,j} \leq P_i, \end{cases}$$

тогда линейная система с переключениями (1) экспоненциально устойчива.

В отличие от задачи анализа устойчивости, области пространства состояний Ω_i больше не задаются *априори*. Теперь области пространства состояния Ω_i , которые индуцируют зависящие от состояния переключающие сигналы, должны быть спроектированы. Более того, пространство состояний не может быть произвольно разделено. Разбиение пространства состояний должно облегчать поиск собственных квадратичных функций типа Ляпунова и удовлетворять условиям невозрастания при переключении. Метод и эффективный алгоритм, реализующий этот подход, представлены в [29].

6. Заключение

Представленный материал следует рассматривать как предназначенный исключительно для первоначального знакомства. В частности, в данном разделе не затронуты такие важные направления как теория стохастических гибридных систем, известных в ранних публикациях как «системы случайной структуры»

(см. [2, 3] и списки источников в этих книгах), и теория гибридных автоматов. Заинтересованному читателю можно рекомендовать сравнительно недавнюю монографию [7] для продолжения более углубленного изучения теории и знакомства с приложениями.

Литература

1. БАРАБАНОВ Н.Е. *О показателе Ляпунова дискретных включений I-III* // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №2. – С. 40–46; №3. – С. 24–29; №5. – С. 17–24.
2. КАЦ И.Я. *Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры*. – Екатеринбург: Изд. УРГУПС, 1998. – 221 с.
3. ПАКШИН П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой*. – М.: Физматлит, 1994. – 303 с.
4. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.
5. ПЯТНИЦКИЙ Е.С. *Избранные труды. Теория управления*. – М.: Физматлит, 2004. – 382 с.
6. ФИЛИППОВ А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. – М.: Наука, 1985. – 255 с.
7. ALWAN M.S., LIU X. *Theory of Hybrid Systems: Deterministic and Stochastic*. – Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Beijing: Higher Education Press, 2018. – 241 с.
8. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – Philadelphia, PA: SIAM, 1994. – 193 с.
9. DAAFOUZ J., RIEDINGER R., IUNG C. *Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems: A Switched Lyapunov Function Approach* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2002. – Vol. 47, No. 11. – P. 1883–1887.

10. DAYAWANSA W.P., MARTIN C.F. *A Converse Lyapunov Theorem for a Class of Dynamical Systems which Undergo Switching* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44. – P. 751–760.
11. DECARLO R.A., BRANICKY M.S., PETTERSSON S., LENNARTSON B. *Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems* // Proc. IEEE: Special Issue Hybrid Systems. – 2000. – Vol. 88. – P. 1069–1082.
12. FANG L., LIN H., ANTSAKLIS P.J. *Stabilization and Performance Analysis for a Class of Switched Systems* // Proc. 43rd IEEE Conf. Decision Control. – 2004. – P. 3265–3270.
13. GURVITS L., SHORTEN R., MASON O. *On the Stability of Switched Positive Linear Systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2007. – Vol. 52, No. 6. – P. 1099–1103.
14. HESPANHA J.P. *Uniform Stability of Switched Linear Systems: Extensions of Lasalle's Invariance Principle* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2004. – Vol. 49, No. 4. – P. 470–482.
15. HESPANHA J.P., MORSE A.S. *Stability of Switched Systems with Average Dwell-Time* // Proc. 38th IEEE Conf. Decision Control. – 1999. – P. 2655–2660.
16. KAMENETSKII V.A., PYATNITSKII E.S. *An Iterative Method of Lyapunov Function Construction for Differential Inclusions* // Systems Control Lett. – 1987. – Vol. 8. – P. 445–451.
17. KING C., SHORTEN R. *A Singularity Test for the Existence of Common Quadratic Lyapunov Functions for Pairs of Stable LTI Systems* // Proc. Amer. Control Conf. – 2004. – P. 3881–3884.
18. LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*. – Boston, MA: Birkhauser, 2003. – 233 p.
19. LIBERZON D., MORSE A.S. *Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems* // IEEE Control Syst. Mag. – 1999. – Vol. 19, No. 5. – P. 59–70.
20. LIBERZON D., TEMPO R. *Common Lyapunov Functions and Gradient Algorithms* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2004. – Vol. 49, No. 6. – P. 990–994.

21. LIN H., ANTSAKLIS P.J. *Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results* // IEEE Trans. Aut. Contr. – 2009. – Vol. 54, No. 2. – P. 308–322.
22. LIN Y., SONTAG E.D., WANG Y. *A Smooth Converse Lyapunov Theorem for Robust Stability* // SIAM J. Control Optim. – 1996. – Vol. 34. – P. 124–160.
23. LIN H., ANTSAKLIS P.J. *Stability and Persistent Disturbance Attenuation Properties for Networked Control Systems: Switched System Approach* // Int. J. Control. – 2005. – Vol. 78, No. 18. – P. 1447–1458.
24. MANCILLA-AGUILAR J.L., GARCIA R.A. *A Converse Lyapunov Theorem for Nonlinear Switched Systems* // Systems Control Lett. – 2000. – Vol. 41. – P. 67–71.
25. MICHEL A.N. *Recent Trends in the Stability Analysis of Hybrid Dynamical Systems* // IEEE Trans. Circuits Syst. I. – 1999. – Vol. 46, No. 1. – P. 120–134.
26. MOLCHANOV A.P., PYATNITSKII E.S. *Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory* // Systems Control Lett. – 1989. – Vol. 13. – P. 59–64.
27. PAPACHRISTODOULOU A., PRAJNA S. *A Tutorial on Sum of Squares Techniques for Systems Analysis* // Proc. Amer. Control Conf. – 2005. – P. 2686–2700.
28. PETTERSSON S., LENNARTSON B. *Stabilization of Hybrid Systems Using a min-Projection Strategy* // Proc. Amer. Control Conf. – 2001. – P. 223–228.
29. PETTERSSON S. *Synthesis of Switched Linear Systems* // Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control. – 2003. – P. 5283–5288.
30. SKAFIDAS E., EVANS R.J., SAVKIN A.V., PETERSEN I.R. *Stability Results for Switched Controller Systems* // Automatica. – 1999. – Vol. 35, No. 4. – P. 553–564.
31. SHORTEN R., NARENDRA K. *Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Common Quadratic Lyapunov Function for Two Stable Second Order Linear Time-Invariant Systems* // Proc. Amer. Control Conf. – 1999. – P. 1410–1414.

32. SHORTEN R., NARENDRA K., MASON O. *A Result on Common Quadratic Lyapunov Functions* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – Vol. 48, No. 1. – P. 110–113.
33. SHORTEN R., NARENDRA K. *Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a CQLF for a Finite Number of Stable LTI Systems* // Int. J. Adaptive Control Signal Processing. – 2002. – Vol. 16, No. 10. – P. 709–728.
34. SHORTEN R., MASON O., CAIRBRE F.O., CURRAN P. *A Unifying Framework for the SISO Circle Criterion and Other Quadratic Stability Criteria* // Int. J. Control. – 2004. – Vol. 77, No. 1. – P. 1–8.
35. SHORTEN R., WIRTH F., MASON O., WULFF K., KING C. *Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems* // SIAM Review. – 2007. – Vol. 49, No. 4. – P. 545–592.
36. WICKS M.A., PELETIES P., DECARLO R.A. *Switched Controller Design for the Quadratic Stabilization of a Pair of Unstable Linear Systems* // Eur. J. Control. – 1998. – Vol. 4. – P. 140–147.

4.2. НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Кудинов Ю.И.¹, Пащенко Ф.Ф.²

1. Введение

В последние десятилетия наблюдается высокий интерес к анализу и синтезу нечетких регуляторов для систем управления технологическими процессами и установками. Это связано с тем, что их легко сконструировать и настраивать на эффективное управление нелинейными и плохо определенными объектами.

В настоящее время уже определенно можно говорить о сформировавшихся пяти *видах нечетких регуляторов*: логико-лингвистических, аналитических, пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД-), обучаемых и гибридных. Цель настоящего раздела – представить обзор, позволяющий ориентироваться в области нечетких систем и использовать их для управления технологическими процессами.

2. Основные понятия и определения нечетких множеств

Рассмотрим такие основные понятия, как нечеткие множества и некоторые операции на них, лингвистическая переменная и нечеткое отношение [2].

Нечетким множеством X на универсальном множестве $\mathbf{X} = \{x: x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ называется упорядоченная совокупность пар

$$X = \{x, X(x)\}, \quad x \in \mathbf{X},$$

где $X(x)$ – *функция принадлежности* (ФП) x к $X(x)$, отображающая \mathbf{X} в отрезок $[0, 1]$.

¹ Юрий Иванович Кудинов, Липецкий государственный технический университет, Липецк; д.т.н., профессор (kui_kiu@lipetsk.ru).

² Федор Федорович Пащенко, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., профессор (pif-70@yandex.ru).

На нечетких множествах X_1 и X_2 определены операции *объединения* (связки «или», «иначе»)

$$(X_1 \cup X_2)(x) = X_1(x) \vee X_2(x) = \max(X_1(x), X_2(x))$$

и *пересечения* (связка «и»)

$$(X_1 \cap X_2)(x) = X_1(x) \wedge X_2(x) = \min(X_1(x), X_2(x)).$$

Лингвистическая переменная определяется тройкой (x, T_x, \mathbf{X}) , в которой x – название переменной, $T_x = \{T_x^1, T_x^2, \dots, T_x^k\}$ – терм-множество лингвистических значений, или *термов* $T_x^l, l = 1, \dots, k$, с соответствующими ФП $T_x^l(x)$, заданными на универсальном множестве \mathbf{X} .

Нечеткое отношение R на декартовом произведении множеств $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(x, y), x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$ есть нечеткое множество в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ с ФП $R(x, y)$, которая характеризует степень совместимости пары (x, y) с R . Если x, y – точки, то есть $x \in \mathbf{X} = \{x^1, \dots, x^k\}, y \in \mathbf{Y} = \{y^1, \dots, y^s\}$, то отношение является матрицей с элементами $R(x^l, y^r), l = 1, \dots, k, r = 1, \dots, s$.

3. Логико-лингвистические регуляторы

Принципы построения *логико-лингвистического регулятора* (ЛЛР) рассмотрим на примере простейшего обобщенного регулятора с одним входом x (обычно - ошибка регулирования) и одним выходом y (регулирующее или управляющее воздействие), связанных нечеткими правилами

- (1) R^1 : если x есть X^1 , то y есть Y^1 , иначе
 R^2 : если x есть X^2 , то y есть Y^2 , иначе

 R^n : если x есть X^n , то y есть Y^n ,

содержащими нечеткие множества $X^l \in T_x$ и $Y^l \in T_y$.

В алгоритме функционирования ЛЛР в той или иной форме присутствуют процедуры преобразования (*фаззификации – Fuz*) измеренного значения x^0 переменной x в лингвистическое X^l , нечеткого вывода (Fuzzy Inference – *FI*) лингвистического выхода Y^r по известному входу X^l и совокупности правил $R = \{R^1, \dots, R^n\}$ и преобразования (*дефаззификации – Def*) линг-

вистического значения выхода Y' в действительное число y^0 (рис. 4.2.1).

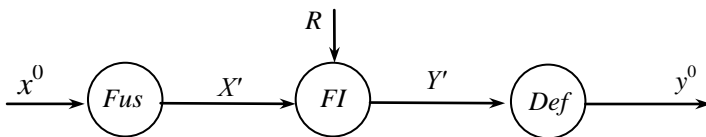


Рис. 4.2.1. Преобразование входа в нечетком регуляторе

Входной измеримой переменной x со значением x^0 соответствует так называемое «вырожденное» нечеткое множество X' с ФП

$$X'(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x^0, \\ 0, & \text{если } x \neq x^0; \end{cases}$$

где x^0 – точка, именуемая *синглтоном* множества X' . Запишем выражение нечеткого вывода для ЛЛР, заданного множеством правил (1) в виде

$$(2) \quad \frac{x \text{ есть } X'}{y \text{ есть } Y'}$$

Значения истинности высказываний « x есть X^θ », « y есть Y^θ » и « x есть X' » в правилах (1) и посылке выражения вывода (2) определяются величиной ФП $X^\theta(x)$, $Y^\theta(y)$ и $X'(x)$ для $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$.

Каждое правило R^θ – это *нечеткая импликация*

$$R^\theta = \text{если } x \text{ есть } X^\theta, \text{ то } y \text{ есть } Y^\theta = X^\theta \rightarrow Y^\theta.$$

ЛЛР в качестве процедуры вывода Y' использует *максиминную композицию* Заде [2]:

$$(3) \quad Y'(y) = (X' \circ R)(y) = \bigvee_{x \in \mathbf{X}} (X'(x) \wedge R(x, y)),$$

$$\text{где } R(x, y) = \bigvee_{\theta=1}^n R^\theta(x, y) = \bigvee_{\theta=1}^n X^\theta(x) \wedge Y^\theta(y).$$

В точке x^0 выражение (3) после подстановки $X'(x^0) = 1$ принимает вид

$$(4) \quad Y'(y) = \bigvee_{\theta=1}^n R(x^0, y) = \bigvee_{\theta=1}^n (X(x^0) \wedge Y^\theta(y)).$$

и разностными уравнениями

$$(8) \quad X_{t+1} = X_t \circ R.$$

В публикациях [13–15] анализировались устойчивость и управляемость нечетких динамических систем типа (7) и (8). Для этих целей привлекались функции Ляпунова и методы оценки устойчивости, опирающиеся на такие специфические понятия нечетких множеств, как энергия нечеткого множества X_t и нечеткого отношения R . Основным недостатком предлагаемых подходов заключается в отсутствии рекомендаций по синтезу нечетких регуляторов и систем управления, обладающих определенными показателями качества процессов регулирования.

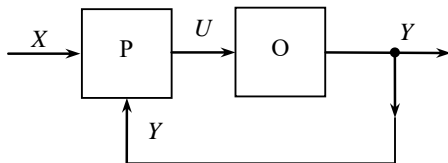


Рис. 4.2.2. Схема замкнутой системы
(P – регулятор, O – объект управления)

Первая попытка синтеза оптимального в смысле минимума ошибки регулирования ЛЛР была предпринята в замкнутой системе управления (рис. 4.2.2) на основании заданных таблицами нечетких операторов объекта [14]:

$F_{ou} =$

$U \backslash Y$	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	ZE	NS	NS	NM	NB	NM	NS
NM	PB	ZE	NB	NB	NB	NM	NB
NS	NS	NS	ZE	NM	NM	NB	NB
ZE	PB	PB	PB	ZE	PS	PS	PS
PS	NM	ZE	PS	NB	PB	PM	PB
PM	NM	NS	ZE	PS	ZE	NS	NB
PB	NB	NB	NB	ZE	PB	PB	PB

\dot{Y}

и оптимальной замкнутой системы

$$F^* =$$

$Y \backslash X$	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	ZE	NS	NS	NM	NB	NB	NB
NM	PS	ZE	NS	NS	NM	NB	NB
NS	PS	PS	ZE	NS	NS	NM	NB
ZE	PB	PM	PS	ZE	NS	NM	NB
PS	PB	PM	PS	PS	ZE	NS	NM
PM	PB	PB	PM	PS	PS	ZE	NS
PB	PB	PB	PB	PM	PS	PS	ZE

В целях компактности изложения представим в аналитической форме табличные операторы объекта управления (O)

$$(9) \quad \dot{Y} = F_{OU}(Y, U),$$

оптимальной замкнутой системы

$$(10) \quad \dot{Y} = F^*(Y, X)$$

и синтезируемого регулятора (P)

$$(11) \quad U = F_{PX}(X, Y),$$

в которых лингвистические переменные, характеризующие задание X , выход Y и его скорость \dot{Y} , управление U , принимают значения из терм-множества $T = \{NB, NM, NS, ZE, PS, PM, PB\}$. Для табличного оператора объекта (9) легко получить обратный F_{OU}^{-1} относительно управления U :

$$(12) \quad U = F_{OU}^{-1}(\dot{Y}, Y),$$

а оператор F^* оптимальной замкнутой системы – исходя из графика лингвистической динамики (рис. 4.2.3) и следующих эвристических соображений. Точки 1, 2, ..., 7 на графике рис. 4.2.3 характеризуют равенство лингвистических значений задания X и выхода Y , а также минимальную скорость выхода $\dot{Y} = ZE$, позволяющую предотвратить перерегулирование. Направление и размеры стрелок \dot{Y} соответствуют принятым лингвистическим значениям. Например, в точке «O» определены один набор данных табличного оператора F^* : $X = PS$, $Y = PM$, $\dot{Y} = NS$ и соответствующее правило:

$$\text{если } X = PS \text{ и } Y = PM, \text{ то } \dot{Y} := NS.$$

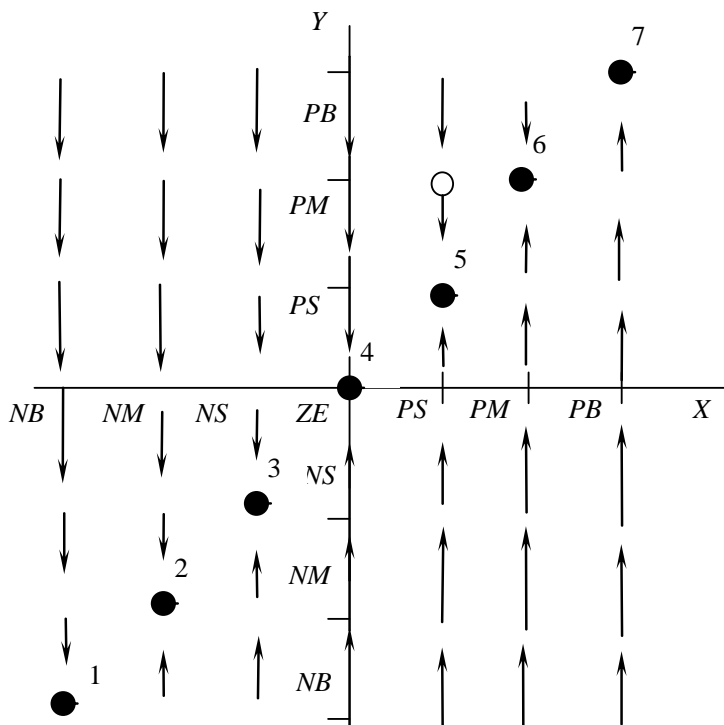


Рис. 4.2.3. График лингвистической динамики

Теперь сформулируем задачу синтеза оптимального нечеткого регулятора. Для всех лингвистических значений X и Y с помощью оператора оптимальной замкнутой системы (10) и обратного оператора объекта (9) определить управления U , то есть тройки $\langle U, X, Y \rangle$, образующие оператор регулятора (11).

Рассмотрим процедуру определения управления U^* в тройке $\langle X^*, Y^*, U^* \rangle$ при $X^* = NS$, $Y^* = PM$. Подстановка $X^* = NS$ и $Y^* = PM$ в таблицу F^* (оператор оптимальной замкнутой системы) дает $\dot{Y}^* = NM$. Для $Y^* = PM$ и $\dot{Y}^* = NM$ из таблицы F_{OU} получаем $U^* = NM$, то есть реализуем обратный оператор объекта и определяем искомую тройку $\langle NS, PM, NM \rangle$.

В общем случае обратный оператор F_{OU}^{-1} не является однозначным. Неоднозначным становится найденный оптимальный

оператор регулятора, что значительно снижает практическую ценность такого подхода к синтезу ЛЛР.

К другим недостаткам ЛЛР табличного типа можно отнести их ограниченную размерность (общее число переменных не должно превышать трех) и субъективность выбора интервалов и соответствующих значений лингвистических переменных.

4. Аналитические регуляторы

Субъективность выбора интервалов и лингвистических переменных и связанное с ней снижение качества управления могут быть в значительной степени устранены в так называемых *аналитических нечетких регуляторах* (АНР) и системах управления, работоспособность которых обеспечивается известными аналитическими и численными методами параметрической идентификации, анализа и синтеза линейных и нелинейных систем с привлечением нечетких динамических моделей.

Особое место занимает так называемая нечеткая *модель Сугено* [20]. Сначала аналитическим путем [23], а затем в конкретных задачах моделирования и управления (в качестве регулятора) были продемонстрированы ее высокие аппроксимационные способности. Нечеткая модель Сугено состоит из совокупности продукционных правил, содержащих в правой части линейные разностные уравнения

$$(13) \quad \text{если } y(t-1) \text{ есть } Y_1^\theta, \dots, y(t-r) \text{ есть } Y_r^\theta, \\ x(t) \text{ есть } X_0^\theta, \dots, x(t-s) \text{ есть } X_r^\theta,$$

$$\text{то } y^\theta(t) = a_0^\theta + \sum_{k=1}^r a_k^\theta y(t-k) + \sum_{l=0}^s b_l^\theta x(t-l), \quad \theta = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{a}^\theta = (a_0^\theta, a_1^\theta, \dots, a_r^\theta)$, $\mathbf{b}^\theta = (b_0^\theta, b_1^\theta, \dots, b_s^\theta)$ – векторы настраиваемых параметров; $\mathbf{y}(t-r) = (1, y(t-1), \dots, y(t-r))$ – вектор состояния; $\mathbf{x}(t-s) = (x(t), x(t-1), \dots, x(t-s))$ – входной вектор; $Y_1^\theta, \dots, Y_r^\theta$; $X_0^\theta, \dots, X_r^\theta$ – нечеткие множества.

Появление модели Сугено оказало огромное влияние на последующее развитие теории нечетких систем управления.

Во-первых, среди нечетких моделей для нее впервые стало правомерным применение традиционной параметрической идентификации.

Во-вторых, несмотря на присутствие в правой части правил линейных разностных уравнений в модели Сугено, посредством уточнения параметров \mathbf{a} , \mathbf{b} порядка r , s и увеличения количества правил n удастся описать с очень высокой точностью нелинейные динамические процессы.

В-третьих, являясь нелинейной и непрерывной функцией входных переменных и параметров, модель Сугено предоставляет широкие возможности аналитического исследования устойчивости нелинейных систем с ее присутствием и последующего их обучения с целью получения требуемого качества переходных процессов.

Для замкнутой системы управления с нечетким регулятором на базе модели (13) также актуальна проблема устойчивости и ее количественной оценки. В духе классического представления линейных систем Танака и Ванг [25] предложили *нечеткий блок* (рис. 4.2.4.) – динамический объект, описываемый нечеткой разностной моделью (13) в векторной форме

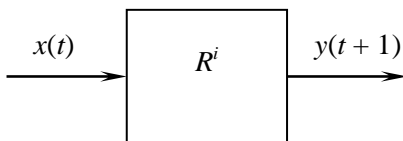


Рис. 4.2.4. Блок объекта управления

(14) R^i : если $\mathbf{y}(t)$ есть \mathbf{Y}^i и $\mathbf{x}(t)$ есть \mathbf{X}^i , то

$$y^i(t+1) = a_0^i + \sum_{k=1}^r a_k^i y(t-k+1) + \sum_{l=0}^s b_l x(t-l+1),$$

где $\mathbf{y}(t) = [y(t), y(t-1), \dots, y(t-r+1)]^T$, $\mathbf{x}(t) = [x(t), x(t-1), \dots, x(t-s+1)]^T$; $\mathbf{Y}^i = [Y_1^i, \dots, Y_r^i]$, $\mathbf{X}^i = [X_1^i, \dots, X_s^i]$; r, s – порядок разностного уравнения; $\mathbf{y}(t)$ есть $\mathbf{Y}^i \Rightarrow y(t)$ есть Y_1^i и ... и $y(t-r+1)$ есть Y_r^i .

Из таких блоков формируются различные соединения (параллельные и с обратной связью) и выводятся их математические модели. Например, соединение с обратной связью (рис. 4.2.5), содержащее блоки объекта

R_1^i : если $y(t)$ есть Y_1^i и $e(t)$ есть E_1^i ,

$$\text{то } y^i(t+1) = a_{10}^i + \sum_{k=1}^r a_{1k}^i y(t-k+1) + \sum_{l=1}^s b_{1l}^i e(t-l+1)$$

и регулятора

(15) R_2^j : если $y(t)$ есть Y_2^j и $e(t)$ есть E_2^j ,

$$\text{то } u^j(t) = a_{20}^j + \sum_{k=1}^r a_{2k}^j \cdot y(t-k+1),$$

эквивалентно блоку

R^{ij} : если $y(t)$ есть Y^{ij} и $e(t)$ есть E^{ij} ,

$$\text{то } y^{ij}(t+1) = a_{10}^i - b_1^i a_{20}^j + b_1^i x(t) + \sum_{k=1}^r (a_{1k}^i - b_1^i a_{2k}^j) y(t-k+1),$$

где $i = 1, 2, \dots, n_1, j = 1, 2, \dots, n_2$;

$$e(t) = [x(t) - u(t), x(t-1) - u(t-1), \dots, x(t-m+1) - u(t-m+1)]^T;$$

$$Y^{ij} = (Y_1^i \cap Y_2^j), E^{ij} = (E_1^i \cap E_2^j).$$

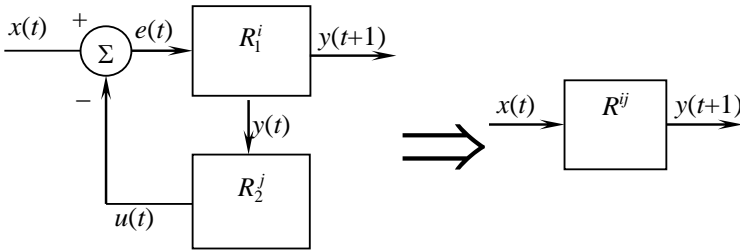


Рис. 4.2.5. Соединение с обратной связью и его преобразование

Вывод аналитических оценок устойчивости нечетких систем (14) и (15) осуществляется с помощью метода Ляпунова на основании уравнения свободного движения

(16) R^i : если $y(t)$ есть Y_1^i и $y(t-r+1)$ есть Y_r^i ,
 то $y^i(t+1) = a_1^i y(t) + \dots + a_r^i y(t-r+1)$, $i = \overline{1, n}$,

правую часть которого можно записать в следующей матричной форме: $Ay(t)$, где $y(t) = [y(t), y(t-1), \dots, y(t-r+1)]^T$,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_1^i & a_2^i & \dots & a_{r-1}^i & a_r^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В работах [7, 9] показано, что нечеткая система (16), представленная расчетной зависимостью

$$y(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^n w^i A_i y(t)}{\sum_{i=1}^n w^i},$$

является асимптотически устойчивой в глобальном, если для всех подсистем существует положительно определенная матрица B такая, что

(17) $A_i^T B A_i - B < 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Справедливость оценки (17) была подтверждена лишь для самого простого пропорционального регулятора.

Близкий подход к анализу устойчивости, опирающийся на методы Ляпунова, был развит в работе [8] для нечеткой системы в пространстве состояний:

R^i : если $y_1(t)$ есть $Y_1^i, \dots, y_r(t)$ есть Y_r^i , то $x(t)$ есть X^i , то

$$y_1(t+1) = a_{11}^i y_1(t) + a_{12}^i y_2(t) + \dots + a_{1r}^i y_r(t) + b_1^i x(t),$$

.....

$$y_r(t+1) = a_{r1}^i y_1(t) + a_{r2}^i y_2(t) + \dots + a_{rr}^i y_r(t) + b_r^i x(t)$$

и получена аналитическая оценка устойчивости замкнутой системы с пропорциональным регулятором.

Ограниченность метода Ляпунова очевидна: он позволяет реализовать устойчивость системы управления лишь с простыми пропорциональными регуляторами и не дает рекомендаций по достижению требуемого качества переходных процессов, которое могут обеспечить нечеткие обучаемые регуляторы и системы управления.

5. Нечеткие ПИД-регуляторы

За последние два десятилетия разработано большое число нечетких *пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД-) регуляторов*, отличающихся структурой и особенностями алгоритмического обеспечения. В связи с этим становится актуальной систематизация нечетких ПИД-регуляторов по ряду признакам.

5.1. ОПИСАНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Нечеткий ПИД-регулятор во многом напоминает нечеткую модель с тремя входами, которыми в случае непрерывных систем могут быть ошибка регулирования $e_1(t) = y^0(t) - y(t)$, её скорость $e_2(t) = \dot{e}_1(t)$ и ускорение $e_3(t) = \ddot{e}_1(t)$, а также с выходом $u(t)$, $t \in [0, T]$, и с соответствующими входами $e_1(k) = y^0(k) - y(k)$, $e_2(k) = e_1(k) - e_1(k - 1)$ и $e_3(k) = e_2(k) - e_2(k - 1)$ и выходами $u(k)$, $\Delta u(k)$ в случае дискретных систем. В схеме обобщенного нечеткого регулятора с тремя входными переменными e_1, e_2, e_3 и одним выходом u , изображенной на рис. 4.2.6а, выполняются следующие операции [22].

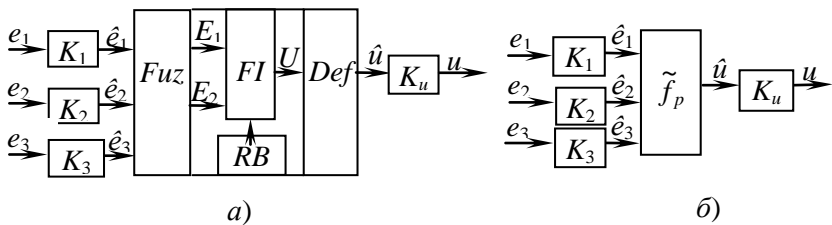


Рис. 4.2.6. Упрощенная (а) и операторная (б) схемы нечеткого регулятора с тремя входами

Действительные значения входов e_i с помощью масштабирующих или нормализующих коэффициентов K_i преобразуются в масштабированные или нормализованные значения \hat{e}_i , $i = 1, 2, 3$, то есть выполняется операция масштабирования $\hat{e}_i = K_i e_i$, где $\hat{e}_i \in [L_i^{min}, L_i^{max}]$, $i = 1, 2, 3$, – минимальный и максимальный пределы изменения входной переменной $\hat{e}_i = K_i e_i$, принимающие нормализованные значения $L_i^{min} = (0, -1, -2)$ и $L_i^{max} = (1, 1, 2)$.

Операция фаззификации *Fuz* (*Fuzzification*) преобразует масштабированные или нормализованные входы \hat{e}_i в нечеткие E_i , $i = 1, 2, 3$.

Нечеткий вывод *FI* (*Fuzzy Inference*) определяет нечеткий выход U на основании нечетких входов E_1, E_2, E_3 и базы правил *RB* (*Rule Base*).

Операция дефаззификации выхода *Def* (*Defuzzyfication*) преобразует нечеткий выход U в масштабированное или нормализованное значение \hat{u} , которое превращается в действительное u умножением на коэффициент K_u :

$$u = K_u \hat{u}.$$

Довольно часто переменная \hat{u} является также нормализованной, то есть $\hat{u} \in [-H, H] = [-1, 1]$. Центральным элементом нечеткого регулятора является блок нечеткого оператора \tilde{f}_p (рис. 4.2.6б), выполняющего операции фаззификации *Fuz*, нечеткого вывода *FI* и дефаззификации *Def* и содержащего базу правил *RB*.

Нечеткие регуляторы вырабатывают два вида управляющих воздействий: абсолютное и инкрементное. *Абсолютное* управляющее воздействие – это значение управления $u(k)$ на k -м шаге дискретизации. *Инкрементное* управляющее воздействие определяется величиной приращения $\Delta u(k)$, на которую надо изменить управление $u(k-1)$ на $(k-1)$ -м шаге, чтобы получить управление на текущем k -м шаге $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$.

5.2. НЕЧЕТКИЕ УПРАВЛЯЮЩИЕ ПРАВИЛА

В зависимости от используемых нечетких моделей и соответствующих управляющих правил различают нечеткие ПИД-регуляторы Мамдани и Сугено.

Управляющие правила нечеткого ПИД-регулятора Мамдани с тремя входами e_i , $i = 1, 2, 3$, и одним выходом u содержат в правой части нечеткие множества U^θ :

$$(18) \quad R^\theta: \text{если } \hat{e} \text{ есть } \mathbf{E}^\theta, \text{ то } u \text{ есть } U^\theta,$$

где \hat{e} есть $\mathbf{E}^\theta = \hat{e}_1$ есть E_1^θ , \hat{e}_2 есть E_2^θ , \hat{e}_3 есть E_3^θ – компактная запись левой части правил, $\theta = 1, \dots, q$ – номер правила; E_i^θ , U^θ – нечеткие множества, характеризующие i -й вход \hat{e}_i , $i = 1, 2, 3$, и управление u на непрерывном $t \in [0, T]$ (при $\hat{e}_i = \hat{e}_i(t)$, $u = u(t)$) и дискретном, $k = 1, 2, \dots, N$, (при $\hat{e}_i = \hat{e}_i(k)$, $u = u(k)$ и $\Delta u = \Delta u(k)$) времени. Управляющие правила нечеткого ПИД-регулятора Сугено в правой части содержат линейные уравнения [27]

$$(19) \quad R^\theta: \text{если } \hat{e} \text{ есть } \mathbf{E}^\theta, \text{ то } \hat{u}^\theta = a^\theta e_1 + b^\theta e_2 + c^\theta e_3,$$

где \hat{e} есть $\mathbf{E}^\theta = \hat{e}_1$ есть E_1^θ , \hat{e}_2 есть E_2^θ , \hat{e}_3 есть E_3^θ – компактная запись левой части правил; a^θ , b^θ , c^θ – постоянные коэффициенты; E_i – нечеткие множества, характеризующие i -й вход \hat{e}_i , $i = 1, 2, 3$, и управление \hat{u}^θ при непрерывном (при $\hat{e}_i = \hat{e}_i(t)$) и дискретном (при $\hat{e}_i = \hat{e}_i(k)$) времени и принадлежности соответствующим терм-множествам $E_i \in T_i$, $U^\theta \in T_u$ с элементами – лингвистическими значениями, определенными ниже. На практике для описания входных \hat{e}_i и выходной \hat{u} или $\Delta \hat{u}$ переменных обычно используются терм-множества с элементами, состоящими из одной буквы (N , *Negative* – отрицательное; P , *Positive* – положительное; Z , *Zero* – нулевое) и двух букв (NB , NM , NS , ZE , PS , PM , PB). Для простоты изложения в ряде случаев будем использовать одинаковые терм-множества $T_e = T_{\Delta e} = T_{\Delta u} = \{NB, NM, NS, ZE, PS, PM, PB\}$. Нечеткие ПИД-регуляторы Мамдани (М) и Сугено (С), приведенные в таблице 4.2.1, различаются количеством входных переменных (не более трех), числом и структурой нечетких операторов $\tilde{f}_\Pi, \tilde{f}_\text{И}, \tilde{f}_\text{Д}$, взаимодействием (совместным, параллельным) сочетаний П-, И-, Д-составляющих, например ПИ-, ПД-, ПИД-, П+И+Д-, ПИ-Д-, а также обозначением, в котором указываются тип регулятора количество входов и после точки количество баз правил, например для ПИД-регулятора в третьей строке (ПИД1.1М). В соответствии с указанными признаками в таблице 4.2.1 формируются струк-

туры нечетких ПИД-регуляторов Мамдани и Сугено и даются ссылки на источники, где эти регуляторы подробно описаны.

Таблица 4.2.1. Классификация нечетких ПИД-регуляторов

№	Тип	Входы	Нечеткие операторы	Нечеткая модель	Обозначение	Источник
1	П	$\langle e_1 \rangle$	$\langle \tilde{f}_п \rangle$	М	П1.1М	[15]
2	И	$\langle e_1 \rangle$	$\langle \tilde{f}_и \rangle$	М	И1.1М	[16]
3	ПИД	$\langle e_1 \rangle$	$\langle \tilde{f}_п \rangle$	М	ПИД1.1М	[17]
4	П+И+Д	$\langle e_1 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{п1}, \tilde{f}_{п2}, \tilde{f}_{п3} \rangle$	М	П1.1И1.1Д1.1М	[17]
5	ПИ	$\langle e_1, \dot{e}_2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пи} \rangle$	М	ПИ2.1М	[15]
6	ПД	$\langle e_1, \dot{e}_2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пд} \rangle$	М	ПД2.1М	[18]
7	ПИД	$\langle e_1, e_2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пд} \rangle$	М	ПИД2.1М	[19]
8	ПИ	$\langle e_1, e_2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пи} \rangle$	С	ПИ2.1С	[15]
9	ПД	$\langle e_1, e_2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пд} \rangle$	С	ПД2.1С	[15]
10	П+И+Д	$\langle e_1, e_2, \dot{e}_2 \rangle$	$\langle \tilde{f}_п, \tilde{f}_и, \tilde{f}_д \rangle$	М	П2.1И2.1Д2.1М	[20]
11	ПИД	$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пид} \rangle$	М	ПИД3.1М	[21]
12	П+И+Д	$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$	$\langle \tilde{f}_п, \tilde{f}_и, \tilde{f}_д \rangle$	М	П1.1И1.1Д1.1М	[22]
13	ПИ-Д	$\langle e_1, e_2, y \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пи}, \tilde{f}_д \rangle$	М	ПИ2.1Д2.1М	[22]
14	ПИД	$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$	$\langle \tilde{f}_{пид} \rangle$	С	ПИД3.1С	[15]

5.3. НАСТРОЙКА НЕЧЕТКИХ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

Заключительный этап реализации нечетких ПИ-, ПД- и ПИД-регуляторов заключается в определении их оптимальных параметров или настроек. Важное отличие нечетких ПИД-регуляторов от линейных от состоит в том, что для нечетких регуляторов отсутствуют какие-либо соотношения, определяю-

щие их оптимальные параметры. Поэтому в настоящем разделе рассматриваются структура и методика численного определения настроек нечеткого ПИ-регулятора с использованием средств MATLAB – SIMULINK.

5.3.1. СТРУКТУРА НЕЧЁТКОГО ПИ-РЕГУЛЯТОРА

Выход нечеткого ПИ-регулятора u , структурная схема которого изображена на рис. 4.2.7, является функцией двух входов: ошибки e и ее скорости Δe [26]

$$(20) \quad u(k) = \tilde{f}_{\text{пн}} (K_e e(k), K_{\Delta e} \Delta e(k)) K_{\Delta u} + \sum_{i=1}^k \Delta u(i) .$$

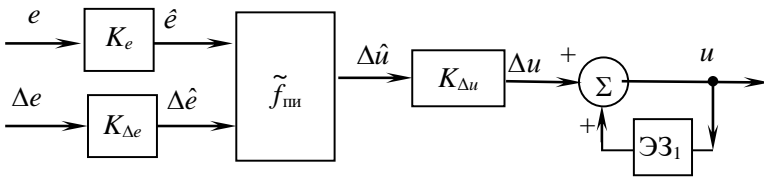


Рис. 4.2.7. Структурная схема нечеткого ПИ-регулятора

Нечеткий оператор $\tilde{f}_{\text{пн}} (K_e e, K_{\Delta e} \Delta e) = \tilde{f}_{\text{пн}} (\hat{e}, \Delta \hat{e})$ вместо правил содержит соотношения для вычисления \hat{u} в зависимости от того, к какой из 20 областей, на которые разбивается пространства переменных $\hat{e} = K_e e$, $\Delta \hat{e} = K_{\Delta e} \Delta e$ (рис. 4.2.8), принадлежат значения переменных \hat{e} , $\Delta \hat{e}$.

Принадлежность пары входов $\hat{e} = K_e e$ и $\Delta \hat{e} = K_{\Delta e} \Delta e$ к одной из 20 областей ICN , $N = 1, \dots, 20$, определяется условиями принадлежности из фрагмента таблицы 4.2.2.

Для каждой из этих областей задается соотношение, определяющее приращение управления $\Delta u(k)$ в каждый момент времени и приведенное во фрагменте таблицы 4.2.3.

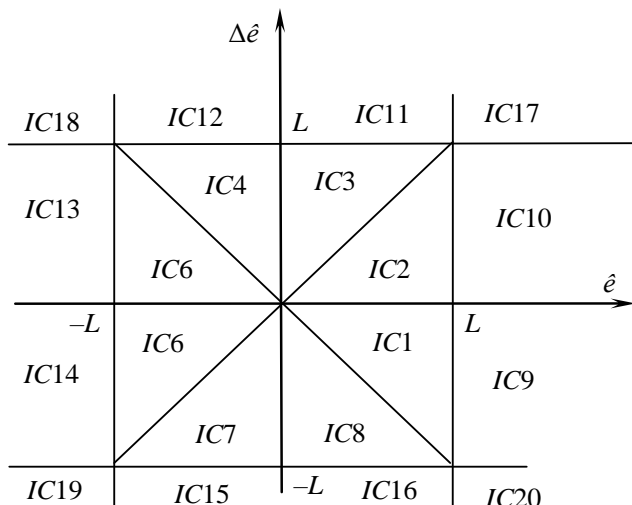


Рис. 4.2.8. Области разбиения пространства входов

Таблица 4.2.2. Условия принадлежности \hat{e} и $\Delta \hat{e}$ к областям ICN

ICN	Условия принадлежности к области ICN
IC1	$(\hat{e} > 0)$ И $(\hat{e} < L)$ И $(\Delta \hat{e} > -L)$ И $(\Delta \hat{e} < 0)$ И $(\Delta \hat{e} > -\hat{e})$
IC2	$(\hat{e} \geq 0)$ И $(\hat{e} \leq L)$ И $(\Delta \hat{e} \geq 0)$ И $(\Delta \hat{e} \leq L)$ И $(\Delta \hat{e} \leq \hat{e})$
...	...
IC20	$(-\Delta \hat{e} < -L)$ И $(\hat{e} > L)$

Таблица 4.2.3. Формулы для вычисления управления Δu в области ICN

ICN	$\Delta u(k)$
1, 2, 5, 6	$\frac{L[\hat{e}(k) + \Delta \hat{e}(k)]}{2(2L - \hat{e}(k))}$
3, 4, 7, 8	$\frac{L[\hat{e}(k) + \Delta \hat{e}(k)]}{2(2L - \Delta \hat{e}(k))}$
...	...
20	L

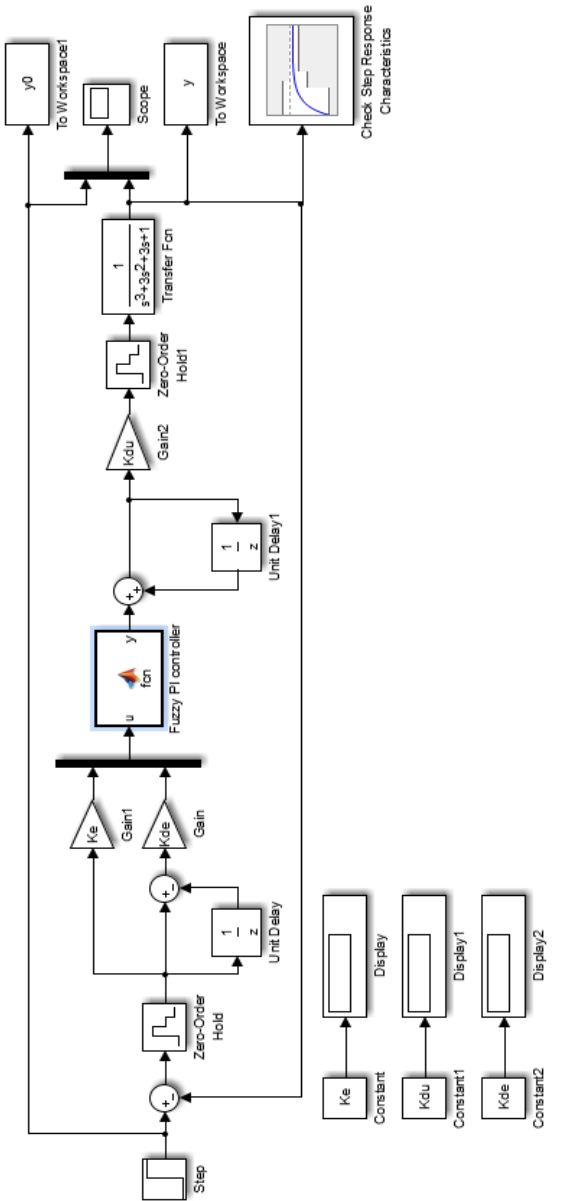


Рис. 4.2.9. Модель цифровой системы управления

5.3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЧЕТКОГО ПИ-РЕГУЛЯТОРА

Построим в Simulink изображенную на рис. 4.2.9 схему модели замкнутой цифровой системы управления [1], содержащей нечеткий ПИ-регулятор и объект управления с передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}.$$

В блок Fuzzy PI controller помещена программа, позволяющая определить по формулам таблицы 4.2.2 область ICN нахождения переменных e , Δe на рис. 4.2.9 и рассчитать $\Delta u(k)$ по формулам таблицы 4.2.3 вырабатываемое нечетким ПИ-регулятором управление Δu . Здесь оптимизации подлежат параметры K_e , $K_{\Delta e}$, $K_{\Delta u}$, обозначенные на схеме (рис. 4.2.9) как K_e , K_{de} , K_{du} соответственно.

В ходе оптимизации параметров K_e , K_{de} , K_{du} нечеткого ПИ-регулятора при значениях параметров $K_e = 1,3$, $K_{de} = 2,6$, $K_{du} = 11,2$ была получена небольшая относительная среднемодульная ошибка, составляющая 0,21%. Другие примеры определения оптимальных параметров нечетких ПИД-регуляторов Мамдани и Сугено приводятся в работе [3].

6. Обучаемые нейро-нечеткие регуляторы

Обучаемый нейро-нечеткий регулятор должен обладать способностью приобретать знания о поведении объекта и системы и на их основе вырабатывать управление, при котором ошибка регулирования не превышает допустимой величины. В процессе обучения помимо регулятора участвует модель объекта, которая также должна приобретать знания и настраиваться на меняющиеся условия функционирования объекта. Указанным требованиям и описанию регулятора и объекта управления в достаточно полной мере удовлетворяет нечеткая модель Сугено со структурой пятислойной нейронной сети прямого действия, известная под именем *ANFIS* (Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference Systems) [12].

Нейро-нечеткая структура обобщенной *TS*-модели с n правилами и m входами, реализующая механизм вывода y , изображена на рис. 4.2.10.

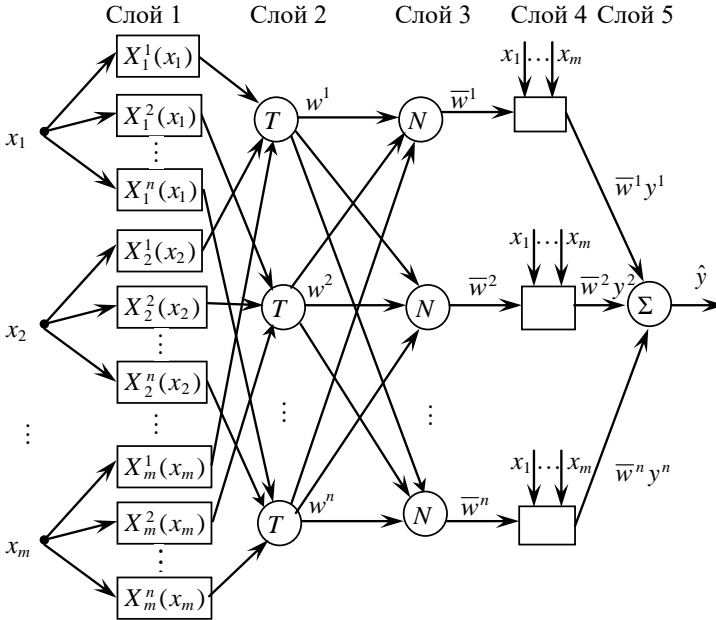


Рис. 4.2.10. Нейро-нечеткая структура модели Сугено

В первом слое при $x_i = x_i^0, i = 1, \dots, m$, вычисляются степени функций принадлежности, а во втором слое они обрабатываются T -оператором минимизации или произведения. В третьем слое (N) определяются нормализованные веса $\bar{w}^\theta = w^\theta / (w^1 + w^2 + \dots + w^n), \theta = \overline{1, n}$, на которые в четвертом слое умножаются соответствующие значения y^θ , найденные по линейным уравнениям

$$y^1 = b_0^1 + b_1^1 x_1 + b_2^1 x_2 + \dots + b_m^1 x_m,$$

$$y^2 = b_0^2 + b_1^2 x_1 + b_2^2 x_2 + \dots + b_m^2 x_m,$$

...

$$y^n = b_0^n + b_1^n x_1 + b_2^n x_2 + \dots + b_m^n x_m.$$

Пятый слой – суммирование и получение итогового значения \hat{y} .

Приобретение моделью Сугено знаний об объекте заключается в определении коэффициентов уравнений b_i^θ , $i = \overline{0, m}$, $\theta = \overline{1, n}$, параметров ФП d_i^θ , $i = 1, \dots, m$, и числа правил n , при которых выходы модели \hat{y} и объекта y совпадают или становятся близкими. Если число правил n фиксировано, функции принадлежности $X_i^\theta(x_i, \mathbf{d})$ непрерывны относительно параметров \mathbf{d} и обрабатываются T -оператором произведения ($w^\theta = \prod_{i=1}^m X_i^\theta(x_i)$, $\theta = \overline{1, n}$), то модели Сугено можно обучать методом обратного распространения ошибки BP (Back Propagation). Он заключается в минимизации квадратической ошибки $I = 0,5(y - \hat{y}(\mathbf{c}))^2$ градиентным методом:

$$(21) \quad \mathbf{c}^{\lambda+1} = \mathbf{c}^\lambda - h \frac{\partial I}{\partial \mathbf{c}},$$

где $\mathbf{c} = (\mathbf{b}, \mathbf{d})$ – вектор параметров; h – рабочий шаг.

На основании цепного правила определения частных производных по d_l^θ

$$\frac{\partial I}{\partial d_l^\theta} = \frac{\partial I}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial w^\theta} \cdot \frac{\partial w^\theta}{\partial X_l^\theta} \cdot \frac{\partial X_l^\theta}{\partial d_l^\theta}$$

и по b_l^θ

$$\frac{\partial I}{\partial b_l^\theta} = \frac{\partial I}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_l^\theta}$$

без промежуточных выкладок запишем их аналитические выражения:

$$\frac{\partial I}{\partial d_l^\theta} = (y - \hat{y}) - \frac{y^\theta - w^\theta \hat{y}}{\sum_{j=1}^2 w^j} \left(\prod_{i=1}^m X_i^\theta(x_i) \right) \cdot \frac{\partial X_l^\theta}{\partial d_l^\theta}, \quad l = \overline{1, m}$$

и

$$\frac{\partial I}{\partial b_l^\theta} = (y - \hat{y}) \cdot x_l, \quad l = \overline{0, m}, \quad \theta = \overline{1, n}, \quad x_0 = 1.$$

В качестве ФП обычно выбираются сигмоидные

$$X(x) = (1 + \exp(dx))^{-1}, \quad d > 0,$$

или радиально-базисные

$$X(x) = \exp(d_1(x - d_2))$$

функции, дифференцируемые по d , d_1 и d_2 . Приведем постановку задачи обучения нейро-нечеткого регулятора (Р) прямого действия, то есть соединенного последовательно с объектом (О) на рис. 4.2.11.

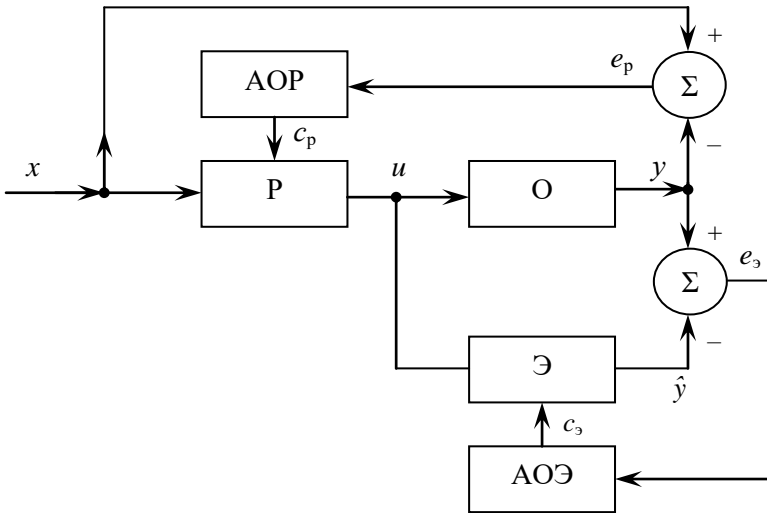


Рис. 4.2.11. Последовательная схема управления

Пусть объект управления с одним выходом описывается дискретным уравнением

$$(22) \quad y(t + 1) = f_0(y(t), \dots, y(t - r), u(t), \dots, u(t - s)).$$

Предположим, что объект управления является обратимым, то есть существует функция f_0^{-1} , инверсная уравнению (22):

$$u(t) = f_0^{-1}(y(t + 1), y(t), \dots, y(t - r), u(t - 1), \dots, u(t - r)).$$

Рассмотрим нейро-нечеткую модель Сугено (см. рис. 4.2.8) с входным вектором $x_p(t) = (y(t + 1), y(t), \dots, y(t - r), u(t - 1), \dots, u(t - r))$:

$$(23) \quad \hat{u}(t) = f_p(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{c}_p),$$

в которой обеспечивается требуемая близость $\hat{u}(t)$ к $u(t)$ при соответствующих входах и которая предлагается в качестве регулятора. Обучение регулятора алгоритмом АОР управлению с минимальной квадратической ошибкой:

$$I_p = 0,5(x(t+1) - y(t+1))^2 = 0,5e_p(t+1).$$

Обучение эмулятора алгоритмом АОЭ, обеспечивающее минимальную квадратическую ошибку,

$$I_s = 0,5(y(t+1) - \hat{y}(t+1))^2 = 0,5e_s(t+1),$$

– такое же, как и регулятора – осуществляется *BP*-методом.

Все основные недостатки первых обучаемых систем управления связаны с применением *BP*-метода, а именно: 1) локальный характер поиска и частое «зацикливание», присущие градиентным методам; 2) требование непрерывности и дифференцируемости функций принадлежности; 3) не определяются порядок (r, s) и количество правил n .

Обучаемые нечеткие регуляторы относятся к классу наиболее перспективных. Они сохраняют высокую работоспособность в условиях помех и погрешностей измерения и достаточно быстро настраиваются на меняющиеся условия производства, снижая тем самым потери от неэффективного управления.

7. Гибридные нечеткие регуляторы

В последнее время все большее внимание привлекают к себе *гибридные регуляторы*, состоящие обычно из нескольких регуляторов (обычно из двух) и наследующие положительные свойства составляющих регуляторов. Например, в работе [9] исследовался гибридный ПИ + *LQR* (пропорционально-интегральный и линейно-квадратический регуляторы). При этом переходный процесс обладал минимальной статической ошибкой (свойство ПИ-регулятора) и высоким быстродействием (свойство *LQR*-регулятора).

ЛИТЕРАТУРА

1. ВАСИЛЬЕВ С.Н., КУДИНОВ Ю.И., ПАЩЕНКО Ф.Ф., ДУРГАРЯН И.С., КЕЛИНА А.Ю., КУДИНОВ И.Ю., ПАЩЕНКО А.Ф. *Интеллектуальные системы управления и нечеткие регуляторы. Часть 2. Обучаемые нечеткие регуляторы, нечеткие ПИД-регуляторы* // Датчики и системы. – 2017. – №2. – С. 3–12.
2. ЗАДЕ Л.А. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
3. КУДИНОВ Ю.И., КЕЛИНА А.Ю., КУДИНОВ И.Ю., ПАЩЕНКО А.Ф., ПАЩЕНКО Ф.Ф. *Нечеткие модели и системы управления*. – М.: ЛЕНАНД, 2017. — 328 с.
4. BRAAE M., RUTHERFORD D.A. *Theoretical and Linguistic Aspects of the Fuzzy Controller* // Automatica. – 1979. – Vol. 12. – P. 553–577.
5. CAO S.G., REES N.W., FENG G. *Universal Fuzzy Controllers for a Class of Nonlinear Systems* // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 22, No. 1. – P. 117–123.
6. CASTILLO-TOLEDO B., MEDA-CAMPANA J.A. *The Fuzzy Discrete-Time Robust Regulation Problem: An LMI Approach* // IEEE Trans Fuzzy Syst. – 2004. – Vol. 12, No. 3. – P. 360–367.
7. CHEN S.S., CHANG Y.C., SU S.F., CHUNG S.L., LEE T.T. *Robust Static Output-Feedback Stabilization for Nonlinear Discrete-Time Systems with Time Delay via Fuzzy Control Approach* // IEEE Trans. Fuzzy Syst. – 2005. – Vol. 13, No. 2. – P. 263–272.
8. DONG J.X., WANG Y.Y., YANG G.H. *Control Synthesis of Continuous-Time TS Fuzzy Systems with Local Nonlinear Models* // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. – 2009. – Vol. B 39, No. 5. – P. 1245–1258.
9. FENG G. *Stability Analysis of Discrete Time Fuzzy Dynamic Systems Based on Piecewise Lyapunov Functions* // IEEE Trans. Fuzzy Syst. – 2004. – Vol. 12, No. 1. – P. 22–28.

10. FENG G., CHEN M., SUN D., ZHANG T.J. *Approaches to Robust Filtering Design of Discrete Time Fuzzy Dynamic Systems* // IEEE Trans. Fuzzy Syst. – 2008. – Vol. 16, No. 2. – P. 331–340.
11. GANG F. *Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems. A Model-Based Approach.* – Taylor and Francis Group, LLC, 2010. – 280 p.
12. JANG J.-S.R. *ANFIS Adaptive-Network-Based Fuzzy System* // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. – 1993. – Vol. 23, No. 6. – P. 665–685.
13. JANTZEN J. *Foundation of Fuzzy Control.* – John Wiley, 2013. – 333 p.
14. KIM E., KIM D. *Stability Analysis and Synthesis for an Affine Fuzzy System via LMI and ILMI: Discrete Case* // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. – 2001. – Vol. B 31, No. 1. – P. 132–140.
15. KIM E., KIM S. *Stability Analysis and Synthesis for an Affine Fuzzy Control System via LMI and ILMI: Continuous Case* // IEEE Trans. Fuzzy Syst. – 2002. – Vol. 10, No. 3. – P. 391–400.
16. KOVACIC Z., BOGDAN S. *Fuzzy Controller Design. Theory and Applications.* – Arlington: Taylor & Francis Group, 2006. – 392 p.
17. KUDINOV Y.I., PASHCHENKO F.F., KELINA A.Y., VASUTIN D.I., DUVANOV E. S., PASHCHENKO A.F. *Analysis of Control System Models with Conventional LQR and Fuzzy LQR Controller* // XIIIth Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'18, 2018, St. Petersburg, Russia. – Procedia Computer Science. – 2019. – Vol. 150. – P. 737–742.
18. KUMAR V., MITTAL A.P. *Parallel Fuzzy P+Fuzzy I+Fuzzy D Controller: Design and Performance Evaluation* // Int. J. of Automation and Computing. – 2010. – Vol. 7, No. 5. – P. 463–471.
19. KUMARI N., JHA A.N. *Automatic Generation Control Using LQR Based PI Controller for Multi Area Interconnected Power System* // Advance in Electronic and Electric Engineering. – 2014. – Vol. 4, No. 2. – P. 149–154.
20. MAMDANI E.H., ASSILIAN S. *An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller* // Int. J. Man-Machine Studies. – 1975. – No. 7. – P. 1–13.

21. MANN G.K.I., HU B.-G., GOSINE R.G. *Two-Level Tuning of Fuzzy PID Controllers* // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. – 2001. – Part B, Vol. 31, No. 2. – P. 263–269.
22. PASSINO K.M., YURKOVICH S. *Fuzzy Control*. – Menlo Park, California: Addison Wesley Longman, 1998. – 520 p.
23. PRECUP R.-E., TOMESCU M.-L. *Fuzzy Logic Control System Stability Analysis Based on Lyapunov's Direct Method* // Int. J. of Computers, Communications & Control. – 2009. – Vol. 4, No. 4. – P. 415–426.
24. TAKAGI T., SUGENO M. *Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control* // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. – 1985. – Vol. 15, No. 116. – P. 116–132.
25. TANAKA K., WANG H.O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. – John Wiley & Sons, Inc., 2001. – 305 p.
26. TANG K.S., MAN K.F., CHEN G., KWONG S. *An Optimal Fuzzy PID Controller* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2001. – Vol. 48, No. 4. – P. 757–765.
27. YING H. *Fuzzy Control and Modeling*. – New York: IEEE Press, 2000. – 310 p.

4.3. ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

Макаренко А.В.¹

1. Введение

Вычислительный интеллект как одна из ветвей *искусственного интеллекта* опирается на эвристические алгоритмы; в качестве основного математического инструментария применяется *машинное обучение по прецедентам*. Оно основано на выявлении общих закономерностей по частным эмпирическим (экспериментальным) данным и по факту относится к классу *индуктивного обучения*. Формально, задача машинного обучения ставится в следующем виде.

Дано:

X – описания объектов (характеристики, признаки, Features);

R – решения алгоритма (ответы, метки, Patterns, Labels).

Существует, но неизвестна, целевая функция (Target Function):

$$G' : X \rightarrow R .$$

На основе анализа набора логических пар $\mathbf{d}'_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n)$, где \mathbf{d}'_n составляет n -й прецедент, необходимо найти алгоритм (решающую функцию, Decision Function): $G : X \rightarrow R$, которая воссоставляет оценку G' .

Минимально выделяют два подмножества прецедентов – обучающую и тестовую выборки соответственно:

$$D^{Tr} = \{\mathbf{d}'_n\}_{n=1}^{N_{Tr}} - Train Set, \quad D^{Ts} = \{\mathbf{d}'_n\}_{n=1}^{N_{Ts}} - Test Set.$$

Отметим важное требование – исключение «протечек данных» (Leaked Data): $D^{Tr} \cap D^{Ts} \equiv \emptyset$.

Введём в рассмотрение алгоритм $G_i : X \times W_i \rightarrow R$, где W – множество допустимых значений вектора параметров алгоритма \mathbf{w} . В этом случае выделяют два основных типа обучения: *параметрический* – при фиксированном G_i ищется «оптимальное» значение $\tilde{\mathbf{w}}$, доставляющее минимум функционала ошибки

¹ Андрей Викторович Макаренко, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; к.т.н. (avm.science@mail.ru).

$L[G_i(X, \tilde{w}), R] \rightarrow \min$; и *структурный* – в этом случае осуществляется также поиск «оптимального» вида G_i .

Выделяют три основных типа (режима) обучения: *с учителем* – $D^{Tr} \neq \emptyset$; *без учителя* – $D^{Tr} \equiv \emptyset$ и *с подкреплением* (*Reinforcement Learning*) – об этом типе обучения см. раздел 1.4.

Из вышеприведённой формулировки задачи фактически следует, что алгоритм G_i , в зависимости от постановки задачи, может решать различные задачи из области управления: оценивания и прогнозирования процессов (см. раздел 1.1), идентификации систем (см. раздел 1.3) и собственно управления (см. Введение к данной книге).

Из числа подходов машинного обучения выделяют обширный класс методов *глубокого обучения* (*Deep Learning*), которые моделируют иерархические абстракции в данных, используя архитектуры, состоящие из каскадного множества нелинейных преобразований (фильтров). Пример иерархических абстракций в данных (распознавание изображений) приведён на рис. 4.3.1: пунктирная стрелка означает, что мета-признаки того или иного изображения помимо композиции (сцены) включают в себя также и все нижележащие (простые) иерархии, как-то: градиенты яркости, прямые линии, углы, контуры, текстуры.

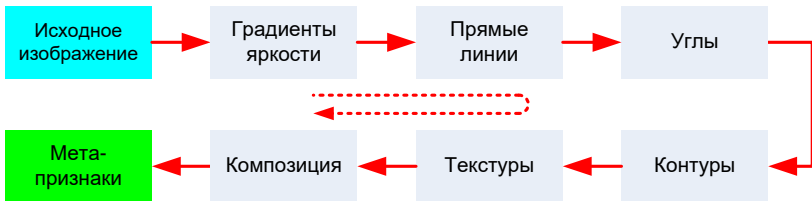


Рис. 4.3.1. Иерархические абстракции в данных

Уникальная особенность глубокого обучения заключается в том, что соответствующие алгоритмы работают с исходными данными (низкоуровневыми признаками) и самостоятельно извлекают (формируют) высокоуровневое признаковое описание объектов. То есть речь идёт о *метаобучении* – компьютерная программа самостоятельно учится, как лучше ей учиться. Сравнительные отличия с классическими *статистическими мето-*

дами и «плоским» машинным обучением даёт следующая диаграмма:

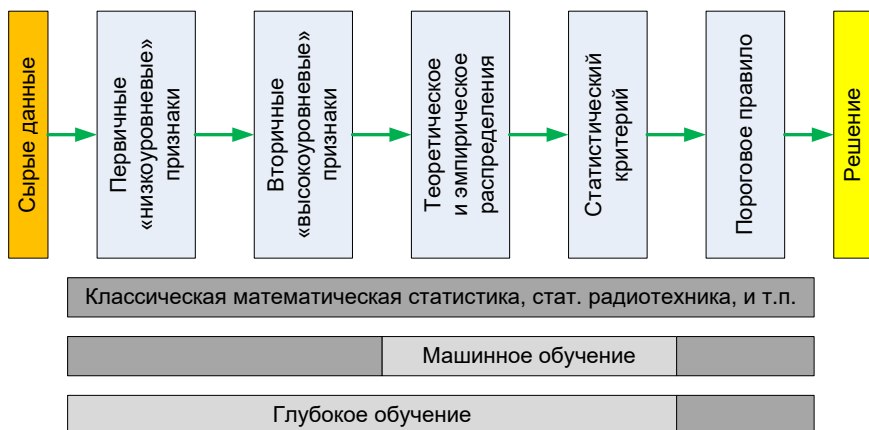


Рис. 4.3.2. Кодировка операций: тёмно-серый – выполняется человеком; светло-серый – автоматически, в рамках обучения модели

Мейнстримом технической реализации концепции «Глубокое обучение» в настоящий момент являются глубокие *искусственные нейронные сети* (ИНС) [2]. Важно понимать, что глубокое обучение существенно шире по своей сути, нежели ИНС, и включает также исследования по *глубоким случайным лесам* (Deep Random Forest), по *глубоким байесовым сетям* (Deep Bayesian Networks) и некоторым другим подходам (в том числе и по исторически обусловленному *логическому интеллекту*).

Одна из особенностей глубоких нейронных сетей заключается в возможности реализации ими адаптивного (в какой-то мере даже сверхадаптивного) управления (см. раздел 1.2).

Как будет показано далее, весь объём достижений глубоких нейросетей, с которыми читатель, возможно, сталкивается в повседневной жизни (распознавание номеров автомобилей, перевод текстов, распознавание слитной речи, синтез голоса и т.п.), объясняется хитроумными комбинациям всего трёх типов слоёв искусственных нейронов.

Настоящий раздел также развенчивает широко распространенный миф из мира ИНС: нейросети – это какая-то «магия» и сплошная «кустарщина», и наука не понимает, как это всё работает. Также будет показано, что ошибочным является стереотип, что глубокие нейронные сети эффективно функционируют только на данных, имеющих ярко выраженные структурные паттерны (изображения, голос, музыка и т.п.) и не работают со случайными процессами.

Для формирования у читателя цельной картины эволюции классических нейросетей в глубокие ниже приводится краткая хронология основных событий: с момента зарождения этого научного направления и до настоящего времени.

2. Эволюция полносвязных нейросетей прямого распространения

Официально старт нейросетевому направлению работ был дан в 1943 г. в статье У. Маккалока и У. Питтса [32]. Авторы ввели понятие *искусственной нейронной сети* (ИНС) и предложили формальную модель *искусственного нейрона*:

$$(1) \quad s = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b, \quad z = g(s),$$

где: \mathbf{x} – вектор входных данных, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\{0,1\}}^N$; \mathbf{w} – вектор весов; b – смещение; \cdot – операция скалярного умножения; $g(\cdot)$ – функция активации; z – выход. Следует отметить, что исходно нейрон оперировал только двухуровневыми сигналами: $x_i = 0$ – логический нуль и $x_i = 1$ – логическая единица, а функция активации строилась по типу пороговой функции Хевисайда:

$$(2) \quad z = g_{01}(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s > a, \\ 0 & \text{если } s \leq a; \end{cases}$$

где $a > 0$ – порог активации.

При формировании ИНС отдельные нейроны (1) объединяются в *нейросетевую слой*:

$$(3) \quad \mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{z} = g_{01}(\mathbf{s}),$$

где \mathbf{W} – матрица весов, в общем случае прямоугольная.

В 1949 г. Д. Хебб в книге [19] изложил некоторые гипотезы относительно того, как нейроны человеческого мозга могут обу-

чаться. Одна из основных концепций: обучение происходит в результате усиления связи (*синаптического веса*) между одновременно активными нейронами¹. Исходя из этого часто используемые связи усиливаются, что объясняет феномен обучения путём многократного повторения одних и тех же входных стимулов (см. также раздел 1.4).

В 1958 г. Ф. Розенблатт изобретает *перцептрон* с одним *скрытым слоем* [40]:

$$(4) \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{y} = g_{01}(\mathbf{s}_1), \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{W}_2 \mathbf{y} + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{z} = g_{11}(\mathbf{s}_2),$$

где $z = g_{11}(\mathbf{s}) = \text{sign } s$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\{0,1\}}^N$.

Следует отметить, что это первая ИНС, которая умела решать задачу классификации и активно применялась на практике.

Особенностью данной сети является необучаемость скрытого слоя (в терминологии Ф. Розенблатта [40] он именуется А-слоем) – элементы \mathbf{W}_1 и \mathbf{b}_1 исходно принимают случайные фиксированные значения $\{-1, 0, 1\}$, также фиксируется и пороги a в функции g_{01} . Как было позже показано, смысл этого слоя заключается в приведении несепарабельной задачи (линейно неразделимой) к сепарабельной (линейно разделяемой). Здесь отчасти работает

Теорема 1. (Ковер, 1965 г. [10]). *Нелинейное проектирование в пространство более высокой размерности заданного набора данных, не являющихся сепарабельными, повышает вероятность их линейной разделяемости.*

Второй слой (в терминологии Ф. Розенблатта [40] он именуется R-слоем) обучается по *методу коррекции ошибки* [5] (см. также раздел 1.4) – формализованному правилу Хебба – по выходу нейросети \mathbf{z} .

В 1960 г Б. Уидроу и М. Хофф для обучения однослойной сети вида (1) предложили так называемое *дельта-правило* [49] (метод обучения ИНС градиентным спуском по поверхности ошибки) и назвали получившуюся систему ADALINE². Данная ИНС сразу же начала использоваться для решения задач *адаптивного управления*. С одной стороны, относительно перцеп-

¹ Впоследствии этот «алгоритм» стал называться «правило Хебба».

² ADAPtive LInear NEuron, адаптивный линейный нейрон.

трона Розенблатта это был шаг назад (отсутствие скрытого слоя и невозможность решения несепарабельных задач). С другой – был применён новый метод обучения на основе минимизации функции стоимости (функционала потерь), который заложил основу для разработки более совершенных алгоритмов машинного обучения¹ и собственно алгоритмов обучения ИНС. Ключевым моментом разработанного дельта-правила является вычисление ошибки модели и формирование корректирующих обновлений весов не по дискретному выходу нейросети \mathbf{z} , а по непрерывнозначному выходу сумматора s на основе квадратичной функции потерь:

$$(5) \quad L(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{Tr}} (r_n - s_n)^2 \rightarrow \min_{\mathbf{w}},$$

где r_n – истинная величина n -го обучающего прецедента, N_{Tr} – размер обучающей выборки. В результате ADALINE стало возможно обучать высокоэффективным методом градиентного спуска:

$$(6) \quad \Delta \mathbf{w} = -\eta \nabla L(\mathbf{w}),$$

где $\Delta \mathbf{w}$ – обновление весов сети (1), $\nabla L(\mathbf{w})$ – градиент функции потерь, η – темп обучения. Как можно заметить из (5), обновление весов вычисляется по всем прецедентам из обучающей выборки (вместо инкрементного обновления веса после каждого образца), поэтому такой подход получил название «пакетный» (*Batch*) градиентный спуск.

В 1969 г. М. Минский и С. Паперт опубликовали книгу [33], в которой содержался целый ряд критических замечаний о функциональных ограничениях перцептронов Розенблатта, тем самым вызвав существенное снижение интереса к тематике ИНС². Следует отметить, что анализ был сделан для так называемого элементарного перцептрона, но название книги и формулировка выводов вызвали у читателей ощущение, что проблемы

¹ В том числе логистической регрессии, метода опорных векторов и целого семейства регрессионных моделей.

² Интересно, что М. Минский был сокурсником Ф. Розенблатта.

касаются всего направления ИНС¹. Началась первая «нейросетевая зима», переводя фокус исследований в искусственном интеллекте на символично-логические системы.

В 1986 г. Д.Е. Румельхарт переоткрывает заново *многослойный перцептрон* (Multilayer Perceptron, MLP) в виде [38]

$$(7) \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{y} = g_{\circ}(\mathbf{s}_1), \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{W}_2 \mathbf{y} + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{z} = g_{\circ}(\mathbf{s}_2),$$

где $g_{\circ}(s) = g_{sg}(s) = \frac{1}{1 + e^{-s}}$ – либо сигмоидальная функция, либо

$g_{\circ}(s) = g_m(s) = \text{th } s$ – гиперболический тангенс. При этом первый слой становится также обучаемым, а вход сети непрерывнозначным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Сеть, как целое, учится по *методу обратного распространения ошибки*, который был впервые описан в 1974 г. в работах А.И. Галушкина [4] и П. Вербоса [48] и существенно развит в работах [1, 42].

Следует отметить, что Д.Е. Румельхарт при публикации своих результатов по какой-то причине искажил определение перцептрона Розенблатта, представив его как ИНС без скрытого слоя, тем самым породив методическую ошибку², что перцептрон Розенблатта не способен решать ряд элементарных несепарабельных задач, например вычислять булеву функцию XOR.

Тем не менее работа [38] запустила вторую волну массового интереса к ИНС. В 1988 г. Брумхед и Лоу предложили *сеть радиально-базисных функций* (Radial Basis Function Network, RBF) [7]. Это MLP с одним скрытым слоем вида

$$(8) \quad y_m = \exp \left[-\beta \sum_{i=1}^N (x_i - r_{im})^2 \right], \quad m = \overline{1, M},$$

где M – число нейронов скрытого слоя, \mathbf{r}_m – так называемый центральный вектор m -го скрытого нейрона (обучаемый пара-

¹ Ради справедливости стоит отметить, что в 1987 г. авторы выпустили третье издание книги, где многие критические замечания были сняты.

² Искусственное понятие «однослойный перцептрон» стало во главу целого ряда недоразумений, вошло в ряд монографий и учебников, в том числе и современных.

метр). Выходной слой имеет линейную (тождественную) функцию активации.

В 1989 г. были получены два важных результата. Во-первых, доказана важная

Теорема 2 (Universal Approximation Theorem FFNN). (George Cybenko, 1989 г. [11]). *Искусственная нейронная сеть прямого распространения с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью, при условии, что сеть имеет в скрытом слое достаточное количество нейронов N , имеющих сигмоидальную функцию активации g_{sg} .*

Теорема 2 является в определённом смысле специализированным аналогом теоремы А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда о представимости непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией непрерывных функций одной переменной и существенно дополнила теорему о сходимости перцептрона [5]. В этом ключе стоит также отметить близкую теорему Хехт – Нильсена [37].

Во-вторых, Дж. Бридли вводит в обиход машинного обучения функцию активации SoftMax [6]:

$$(9) \quad z_i = \frac{e^{s_i}}{\sum_{i=1}^M e^{s_i}}, \quad i = \overline{1, M},$$

где M – число нейронов выходного слоя. Функция (9), в отличие от других «интуитивных» подходов позволила на строгом теоретическом уровне обоснования решать задачу многоклассовой классификации (в режиме «один из многих»). При обучении ИНС с выходным *SoftMax*-слоем используется функция потерь в виде *кросс-энтропии*:

$$(10) \quad L = -\frac{1}{N_{Tr}} \sum_{n=1}^{N_{Tr}} \sum_{i=1}^M (z_n^*)_i \ln(z_n)_i,$$

где N_{Tr} – размер обучающей выборки, M – число нейронов в выходном слое, \mathbf{z}_n^* – вектор меток, ассоциированный с n -м прецедентом.

В 1991 г. К. Хорник обобщает теорему 2 на случай произвольных нелинейных активационных функций [23]. Становится

ясно, что универсальные аппроксимационные свойства ИНС – это в большей мере свойство сетевой структуры.

Тем не менее, несмотря на успехи, исследователи очень скоро «упираются» в существенную ограниченность MLP с одним скрытым слоем – удаётся решать лишь ограниченное число практически важных задач. Такие насущные проблемы, как распознавание изображений, голоса, обработка текста – остаются за гранью приложимости MLP. Попытки добавления числа скрытых слоёв не приносят успеха – сети не обучаются, одна из сильнейших проблем – затухание градиента (*Vanishing Gradients Problem*) $|\nabla L(\mathbf{w})| \rightarrow 0$ по мере продвижения обучающих сигналов ко входу сети. Как следствие, во второй половине 90-х начинается вторая затяжная «нейросетевая зима».

Пример 1. Продемонстрируем практическую ограниченность MLP при классификации случайных сигналов¹. Введём в рассмотрение три класса сигналов \mathbf{x} , различающихся функциями плотности вероятности: N – нормальное; U – равномерное; E – экспоненциальное. Поставим задачу синтеза ИНС по типу MLP для классификации входящих сигналов по принадлежности к одному из классов: N, U или E. При этом потребуем стандартизацию входящих сигналов: нулевое математическое ожидание и единичная дисперсия. Таким образом, классические энергетические обнаружители функционировать не будут, а проблема классификации сдвигается в область распознавания структурных характеристик случайных процессов. Для определённости положим длину каждого временного ряда в 1024 отсчёта. Поставленная задача, как показано в работе [47], успешно решается MLP, если на вход ИНС подаются высокоуровневые информативные признаки – в данном случае статистические моменты (на рис. 4.3.3 приведена диаграмма рассеивания изучаемых сигналов в координатах третьего и четвёртого статистических моментов). Если же на вход нейросети подать «сырые» сигналы \mathbf{x} , то она полностью теряет способность

¹ Задача по сути постановки близка к прикладной проблематике распознавания сигналов в пассивных акустических пеленгаторах.

к классификации сигналов: значение меры качества F_1 [2] не поднимается выше 0,417 [39].

Подобные результаты в своё время как раз и вызвали «вторую нейросетевую зиму» и ограничили применимость «плоских» нейросетей к целому ряду важных прикладных областей, как-то: сверхширокополосная радиолокация, гидроакустическая шумопеленгация, инструментальная медицинская диагностика, техническая диагностика и т.п.

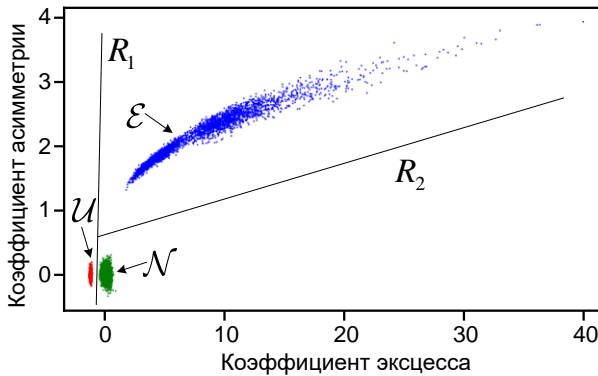


Рис. 4.3.3. Демонстрация линейной разделимости изучаемых сигналов \mathbf{x} в пространстве третьего и четвёртого статистических моментов •

3. Зарождение «глубины» ИНС

Во второй половине 2000-х годов появляются работы, систематически направленные на разработку конструктивных методов обучения многослойных нейронных сетей (с числом скрытых слоёв более одного). В 2006 г. Дж. Хинтон с Р. Салахутдиновым предлагают двухфазный подход к обучению многослойных ИНС [21]. Первая фаза – послойное последовательное обучение без учителя скрытых слоёв (начиная с первого) внутренним представлениям. На второй фазе выходной слой обучается и скрытые слои дообучаются посредством метода обратного распространения ошибок. Способ оказался работоспособным, но весьма затратным в плане вычислитель-

ных ресурсов, и, как оказалось в дальнейшем, весьма неустойчивым для сетей, имеющих более 3–5 скрытых слоёв. Похожая идея тех же авторов на основе ограниченной *машины Больцмана* [2] и *сетей доверия* [2] страдала теми же недостатками. Как выяснилось в дальнейшем, все эти ухищрения – существенно избыточны.

Оказалось, что для решения проблемы обучения глубоких нейронных сетей как единого целого (обучение всех слоёв сразу) необходимо было сделать два «простых шага».

Во-первых, потребовалось найти адекватную функцию активации, что и сделали Дж. Хинтон с соавтором, предложив в 2010 г. функцию ReLU (Rectified Linear Unit) [36]¹: $g_{RL}(s) = \max(0, s)$, график которой приведён на рис. 4.3.4. Для сравнения на рис. 4.3.5 приведен график классической функции активации $g_{sg}(s)$.

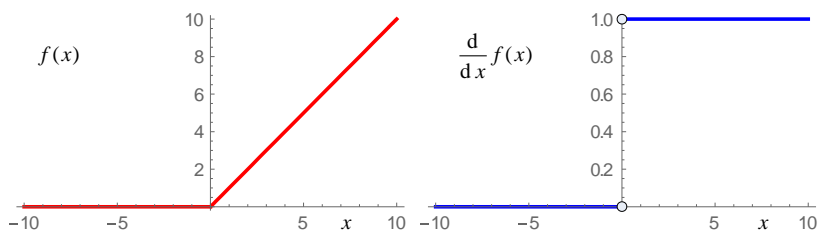


Рис. 4.3.4. График функции ReLU и её первой производной

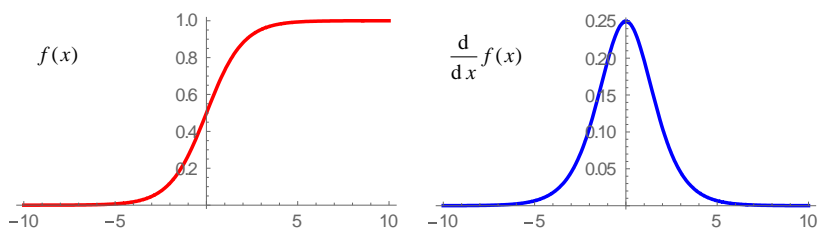


Рис. 4.3.5. График сигмоидальной функции и её первой производной

¹ Впоследствии появилось целое семейство ReLU-подобных функций [1].

Из сравнения графиков функций $g_{sg}(s)$ и $g_{RL}(s)$ видно, что ReLU имеет широкий рабочий отрезок (область, в которой первая производная существенно отлична от нуля). Кроме того, ReLU очень «дешёва» в вычислительном плане. Её недифференцируемость в нуле, как показала практика, никак себя негативно не проявила.

Во-вторых, потребовалось изменить схему *начальной инициализации весов* ИНС. Удачная конструкция получилась в том же 2010 г. у З. Глорота с соавтором [15]. Дисперсию инициализирующего шума (равномерного или нормального) было предложено находить по формуле

$$(11) \quad \text{Var}(\mathbf{w}) = \frac{2}{N_{in} + N_{out}},$$

где N_{in} , N_{out} – количества нейронов в предыдущем и последующем слоях соответственно.

К этому моменту уже более-менее выкристаллизовалось определение глубоких ИНС. К ним формально стали относить нейронные сети с числом скрытых слоёв более одного (точнее более двух – именно такие сети стали успешно извлекать сложные иерархические представления из «сырых» данных) и обучающихся как единое целое (обучение всех слоёв сразу).

Таким образом, к концу первой декады XXI столетия всё было готово для того, чтобы глубокие нейронные сети продемонстрировали прорывной результат. И его появление не заставило себя долго ждать.

4. Глубокие свёрточные нейросети

В 1989 г. Ян Лекун с соавторами публикует работу [28], в которой описывает реальное приложение ИНС к практической задаче по распознаванию рукописных цифр в почтовом индексе. В статье рассматривается новая архитектура ИНС на основе принципа *разделения весов* (Weight Sharing). В данной работе фактически обобщён и переосмыслен ранний опыт по разработке К. Фукушимой *неокогнитрона* [13] и формализованы идеи *коннекционизма* М. Мозера [35]. К 1998 г. идеи Яна Лекуна окончательно вышлифовываются [29] в так называемые *свёр-*

точные нейросети. Представленная в работе [29] архитектура сети LeNet-5 стала фундаментальной на многие последующие годы, особенно для задач анализа изображений. Свёрточная нейросеть использовала последовательную комбинацию из двух типов слоёв¹. Первый тип – *свёртка* (Convolution Layers [2]) – извлекает информативные признаки, имеющие структурную организацию, см. рис. 4.3.6а. Второй тип – *субдискритизация* (Pooling Layers [2]) – за счёт пространственного сжатия данных обеспечивает инвариантность отклика слоя к малому смещению паттерна, см. рис. 4.3.6б.

На выходе сети LeNet-5 применялся RBF слой (8), а в качестве функции потерь при обучении использовалась MSE (5).

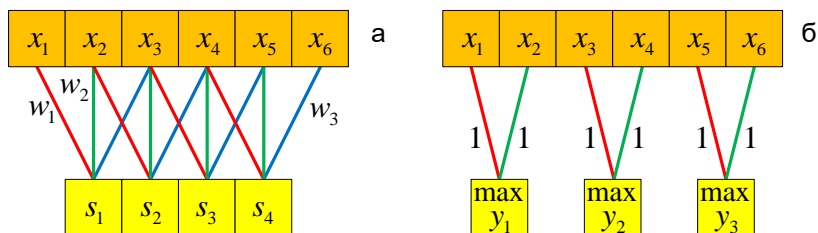


Рис. 4.3.6. Базовые слои свёрточной нейросети: а) – 1D-свёртка, размер 3, шаг 1; б) – слой MaxPool размер 2, шаг 2

В связи с отсутствием достаточных по качеству и размеру наборов данных, а также из-за медленного обучения на центральном процессоре (CPU) с 1998 г. по 2010 г. свёрточные нейросети пребывали в состоянии некоторой инкубации.

В 2010 г. Д. Кирешан и Й. Шмидхубер опубликовали одну из первых реализаций свёрточной нейросети на графическом ускорителе (GPU) [9]. Реализация содержала 9 скрытых слоёв и оба прохода – прямой (расчёт) и обратный (обучение).

В 2012 г. А. Крижевский² в соревновании по распознаванию изображений ImageNet¹ применил подход на основе глубоких

¹ Реализация слоёв в сети LeNet-5 отличалась от принятой в настоящее время.

² Кстати, аспирант Дж. Хинтона.

нейронных сетей. Его свёрточная сеть AlexNet победила с существенным отрывом от лучших решений, основанных на классических техниках компьютерного зрения и машинного обучения [27]. Эта работа фактически дала исходный толчок к буму Deep Learning, который мы наблюдаем и в настоящее время.

Отметим, что на выходе сети AlexNet стоял уже привычный SoftMax (9), в качестве функции потерь при обучении использовалась кросс-энтропия (10), а основной функцией активации являлась ReLU.

В том же 2012 г. тот же Дж. Хинтон с коллегами ввёл в рассмотрение технику *Dropout* [20] для борьбы с *переобучением*: на каждой итерации обучения часть нейронов скрытого слоя вместе с их входящими и исходящими весами исключается, а после завершения итерации – возвращается. После окончания обучения все веса умножаются на нормализующий коэффициент. Как впоследствии было показано, эта процедура эквивалентна порождению экспоненциально большого ансамбля ИНС и усреднения (*ансамблирования*) их решений, что усиливает инвариантность сети к ошибкам в данных.

В 2014 г. К. Симонян и А. Зиссерман публикуют так называемую VGG-сеть [45]. Она содержала 19 скрытых обучаемых слоёв. Её архитектура шла вразрез с рекомендациями авторов ранних сетей: использовать во входных слоях крупные свёртки размером не менее 5×5 пикселей (LeNet-5) и 11×11 пикселей (AlexNet). Оказалось, что последовательность мелких свёрточных ядер 3×3 эффективно эмулирует более крупные рецептивные поля (типа 9×9 , 11×11) при явно меньшем числе настраиваемых параметров и с меньшим количеством затратных операций умножения.

Но оказалось, что 3×3 – это не предел. Осенью того же 2014 г. Кристиан Жегеди с коллегами публикует так называ-

¹ *ImageNet* – база данных аннотированных изображений, предназначенная для отработки и тестирования алгоритмов распознавания образов и машинного зрения. Для категоризации объектов на изображениях используется семантическая сеть *WordNet*. База данных определяет 1000 классов и по состоянию на 2016 год содержала около 10 млн изображений.

емую GoogLeNet [46], включающую в свой состав модули Inception (см. рис. 4.3.7), в которых ключевую роль играют ядра размером 1×1 . Эта работа во многом является творческим осмыслением ранее предложенного подхода Network-in-Network [30], в котором применяются свёртки размером 1×1 (фактически пространственно ориентированные слои MLP) для увеличения комбинаторных свойств свёрточных слоёв.

К концу 2014 г. происходит некий «фазовый переход»: интернет-гиганты, в том числе Google, признают высокую эффективность глубоких свёрточных ИНС в задачах, связанных с распознаванием изображений и голоса, и начинается активное их внедрение в соответствующие бизнес-процессы.

В 2015 г. С. Иоффе с коллегой предлагают *стандартизовать* данные внутри нейросети при их передаче между скрытыми слоями [24]. Техника была названа *Batch Normalization*:

$$(12) \quad \mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}, \quad y_i = BN_{\gamma, \beta}(x_i), \quad \mu_{\mathcal{B}} = M[\mathcal{B}],$$

$$\sigma_{\mathcal{B}}^2 = D[\mathcal{B}], \quad \hat{x}_i = \frac{x_i - \mu_{\mathcal{B}}}{\sigma_{\mathcal{B}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad BN_{\gamma, \beta} : y_i = \gamma x_i + \beta,$$

где: \mathcal{B} – мини-батч данных; γ, β – обучаемые параметры.

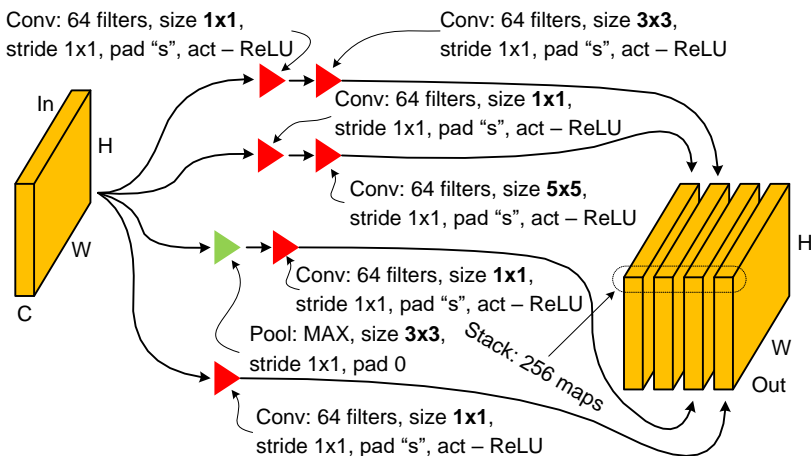


Рис. 4.3.7. Структура свёрточного модуля Inception (расшифровку обозначений см. в [2])

Предложенный подход существенно облегчил обучение глубоких структур, так как стандартизация приводила к тому, что последующий слой не тратил свои степени свободы на сдвиг и масштабирование входящих данных, а занимался только оцениванием структурных свойств. Как следствие: ускорение сходимости процесса обучения, работа с более сложными данными, возможность использовать более высокие значения Learning Rate – параметр η в (6). Следует отметить, что в некоторых литературных источниках *Batch Normalization* объявляют более эффективной заменой *Dropout*, но на самом деле у них разный принцип действия и разное назначение.

В самом конце 2015 г. выходит весьма нетривиальная (и, как оказалось впоследствии, революционная) работа [18] сотрудников одного из исследовательских центров Microsoft. В статье описываются так называемые Residual Networks (ResNet: *свёрточная нейросеть с остаточными блоками*), см. рис. 4.3.8. Основная идея ResNet: неизменённые входные данные суммируются с нелинейно преобразованными. Это сразу же привело к стабильной обучаемости сетей глубиной в 100, а в последствии и в 1000 слоёв¹ на достаточно сложных данных.

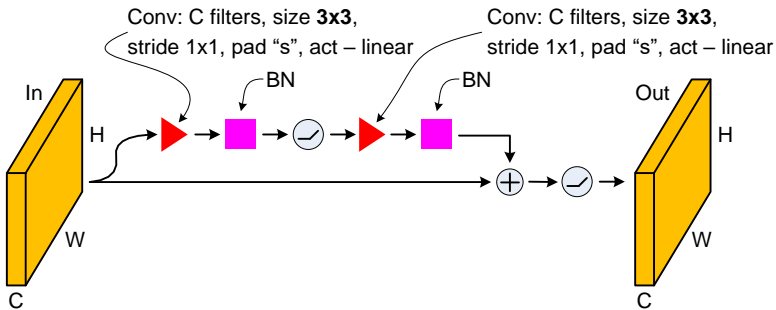


Рис. 4.3.8. Структура свёрточного модуля ResNet (расшифровку обозначений см. в [2])

¹ Практического смысла в столь глубокой сети нет никакого (по крайней мере на исследовавшихся задачах), но есть смысл методический: «можем обучать».

На протяжении 2016–2018 гг. исследователи в основном экспериментировали с различными вариациями и комбинациями Inception и ResNet и их приложениями к реальным задачам.

Следует отметить, что в настоящем подразделе не рассмотрены некоторые специфические свёрточные слои, как-то: *Dilation*, *Depthwise Separable*, *Transposed*. Заинтересованный читатель сможет найти о них подробную информацию в книге [2].

Пример 2. Продемонстрируем богатые функциональные возможности элементарной свёрточной сети на задаче из примера 1. Сформируем ИНС с одним скрытым слоем из одного свёрточного ядра размером 1 (см. рис. 4.3.9) и на вход подадим «сырые данные» x . Как показано в работе [39], подобная ИНС весьма успешно решает задачу классификации случайных сигналов имеющих идентичную энергию, и различающихся только функциями плотности вероятности: N, U, E. Мера качества классификации $F_1 = 1$.

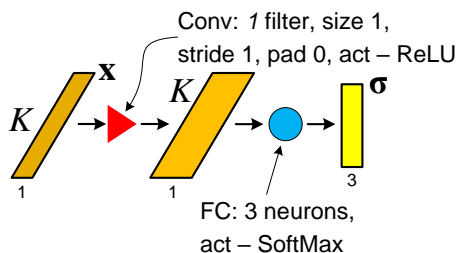


Рис. 4.3.9. Структура минимальной свёрточной ИНС, успешно решающей задачу классификации случайных сигналов с функциями плотности вероятности N, U, E •

В работе [39] также проведён анализ структуры обученных свёрточных сетей и механизмов их функционирования при принятии решения в случае представленной задачи. Исследована их устойчивость к загрязнению входных данных по модели запыления канала/сенсора и возможность обнаружения сетью преобладающего сигнала в смеси сигналов N, U, E в условиях априорной неопределенности. Таким образом, показано, что глубокие свёрточные нейронные сети могут эффективно работать

не только с сигналами, имеющими ярко выраженные паттерны, но и с реализациями узко- или широкополосных случайных процессов, и таким образом решать ряд задач по обработке сигналов. Решение подобной сложной прикладной задачи изложено в работе [31], посвящённой разработке на основе глубокой сверточной ИНС первичного классификатора сигналов для квантовой волоконно-оптической системы охраны магистральных трубопроводов.

5. Глубокие рекуррентные нейросети

В 1990 г. Дж. Элман предложил *рекуррентную ИНС* с одним скрытым слоем по типу MLP [12]:

$$(13) \mathbf{h}_k = g_h(\mathbf{W}_h \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_h \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{b}_h), \mathbf{y}_k = g_y(\mathbf{W}_y \mathbf{h}_k + \mathbf{b}_y),$$

где: k – дискретное время; \mathbf{h}_k – вектор скрытого состояния сети в момент времени k . Как видно из (13), слагаемое $\mathbf{U}_h \mathbf{h}_{k-1}$ задаёт обратную связь и отвечает за временной контекст. Этот контекст «одношаговый» по времени, подобные сети классифицируют как SimpleRNN (Recurrent Neural Network), в противовес им многошаговые сети называются FullyRNN.

В 1991 г. Х. Зигельманн и Е. Сонтаг доказали следующий результат.

Теорема 3 (О полной тьюринговости RNN). [44]. *Любые машины Тьюринга могут моделироваться полностью связанными рекуррентными сетями, созданными из нейронов с сигмоидальными функциями активации, при условии, что сеть имеет достаточное количество нейронов в скрытом слое M и достаточное число шагов временной памяти K .*

В 1992 г. К. Фунахаши и И. Накамура доказали следующий результат.

Теорема 4 (Универсальная аппроксимационная теорема RNN). [14]. *Любая нелинейная динамическая система класса*

$$(14) \quad \frac{d}{dt} s(t) = f(s), \quad s(t=0) \in S_0,$$

может быть аппроксимирована с любой точностью рекуррентной нейронной сетью, без ограничений на компактность

пространства состояний системы, при условии, что сеть имеет достаточное количество нейронов в скрытом слое M .

Из теоремы 4 автоматически вытекает следствие, что любая непрерывная кривая (динамический процесс, временной ряд) может быть аппроксимирована с любой точностью выходом RNN (при соблюдении ряда условий, основными из которых являются достаточное количество нейронов рекуррентного слоя M и достаточное число шагов его временной памяти K). Таким образом, открываются возможности применения RNN для высокоэффективного решения ряда задач управления¹, в том числе оценивания и прогнозирования динамических сигналов, идентификации систем управления и т.п.; причём в классе адаптивных и сверхадаптивных систем управления.

В 1997 г. М. Джордан предложил модификацию сети Элмана (13) [25]:

$$(15) \quad \mathbf{h}_k = g_h(\mathbf{W}_h \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_h \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{b}_h), \quad \mathbf{y}_k = g_y(\mathbf{W}_y \mathbf{h}_k + \mathbf{b}_y).$$

Из сравнения (13) и (15), видно, что в случае *сети Джордана* контекст решения определяется выходом сети, а не скрытым слоем.

Теоремы 3 и 4 вызвали активные исследования применимости сетей Элмана и Джордана в самых различных областях, но очень скоро выяснились фатальные недостатки SimpleRNN:

– фактически сети оперируют очень короткими динамическими контекстами, забывание «прошлого» идёт с экспоненциальной скоростью;

– в рамках одной сети очень сложно совмещать процессы различных масштабов, в том числе «быстрое» и «медленное» время, а также обрабатывать пропуски данных;

– рекуррентные сети, построенные по типу MLP, очень сложно обучать (используется алгоритм Backpropagation Through Time) при больших значениях K : градиент либо затухает, либо испытывает взрывной рост.

¹ Естественно, что эти возможности относятся к глубоким RNN, в том числе имеющих в своём составе ячейки LSTM (описание см. ниже).

В 1997 г. для решения означенных проблем С. Хохрейтер с коллегами предложил принципиально иную архитектуру RNN, названную LSTM – Long Short-Term Memory (*долгая краткосрочная память*) [22]. Элементарная ячейка скрытого слоя сети приведена на рис. 4.3.10.

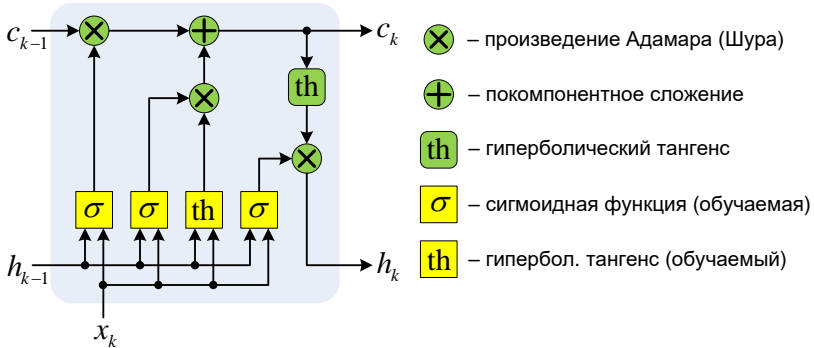


Рис. 4.3.10. Элементарная ячейка LSTM

Ячейка LSTM содержит *конвейер состояния ячейки* $c_{k-1} \rightarrow c_k$, который включает в себя только линейные (!) операции. Модификация информации управляется вентилями (*Gates*): $s' = s(\sigma(\cdot))$, причём $\sigma(\cdot) \in [0, 1]$. Стандартная ячейка LSTM состоит из четырёх вентиляей:

«Forget gate»:

$$(16) \quad \mathbf{f}_k = \sigma(\mathbf{W}_f \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_f \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{b}_f).$$

Интерпретация: если тема (сцена) изменяется, то информация о старой теме (сцене) стирается.

«Input Gate & Activation»:

$$(17) \quad \mathbf{i}_k = \sigma(\mathbf{W}_i \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_i \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{b}_i), \quad \tilde{\mathbf{c}}_k = \text{th}(\mathbf{W}_c \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_c \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{b}_c).$$

Интерпретация: определяется какие значения будут обновляться и создаётся вектор кандидатов на $\tilde{\mathbf{c}}_k$, которые предполагается добавить в состояние ячейки.

«Internal State»:

$$(18) \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{f}_k * \tilde{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{i}_k * \tilde{\mathbf{c}}_k.$$

Интерпретация: формируется новое состояние ячейки \mathbf{c}_k .

«Output Gate & Value»:

$$(19) \quad \mathbf{o}_k = \sigma(\mathbf{W}_o \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_o \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{b}_o), \quad \mathbf{h}_k = \mathbf{o}_k * \text{th } \mathbf{c}_k.$$

Интерпретация: формируется новый выход ячейки \mathbf{h}_k .

Количество настраиваемых во время обучения параметров в слое LSTM: $4(N^2 + MN + N)$, где N – число признаков во входном векторе \mathbf{x} , M – число нейронов в рекуррентном слое, эту же размерность имеют вектора \mathbf{c} и \mathbf{h} .

Последующие исследования LSTM-сетей показали, что для них выполняются теоремы 3 и 4, но при этом LSTM-сети свободны от большинства проблем SimpleRNN.

В 2000 г. Т. Чао и Х. Ли расширили теорему 4 на неавтономные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения [8]:

$$(20) \quad \frac{d}{dt} s(t) = f(s) + g(t), \quad s(t=0) \in S_0.$$

В 2005 г. Ф. Морин и Б. Йошуа предложили иерархическое обобщение Softmax слоя (9) [34], что сделало возможным устойчивое решение задач классификации (в первую очередь в компьютерной лингвистике) размером свыше 20 тысяч классов.

В этом же году А. Гравес и Ю. Шмидхубер предлагают двунаправленное обобщение LSTM – BiDirectional LSTM [17]. Основная мотивация: «Настоящее зависит не только от прошлого, но и от будущего». Впоследствии это позволило получить более устойчивые и качественные решения ряда задач, так как для формирования выхода z_i сеть использовала информацию не только из левой части временного ряда: $[\dots, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$, но также и из правой: $[z_{i+1}, z_{i+2}, \dots]$.

Таким образом, к концу 2005 г. у исследователей формируется уверенность в перспективности применения LSTM-сетей в области компьютерной лингвистики, распознавания и синтеза слитной речи, онлайн распознавания слитных рукописных текстов и т.п. Интенсивность исследований в области рекуррентных ИНС существенно возрастает.

В 2013 г. А. Гравес предлагает первую дифференцируемую реализацию¹ механизма внимания (*Attention Layer*) [16]. Структурная схема предложенного слоя сети приведена на рис. 4.3.11.

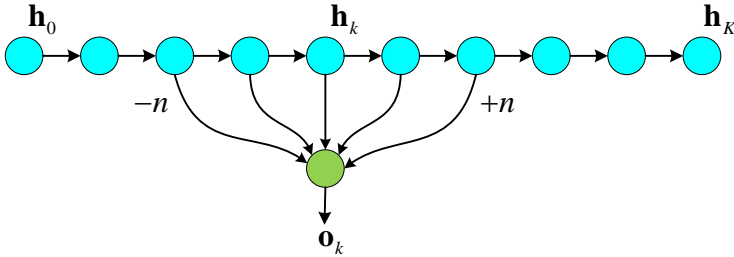


Рис. 4.3.11. Схема слоя внимания

Выход слоя внимания формируется как взвешенное скользящее среднее от выхода рекуррентного слоя:

$$(21) \quad o_k = \sum_{i=0}^{2n} a_i h_{k+(i-n)}, \quad \sum_{i=0}^{2n} a_i \equiv 1,$$

где \mathbf{a} – вектор обучаемых параметров. Интерпретация (21): при формировании выхода слоя учитываются настраиваемые локальные во времени структурные связи – так называемый контекст.

Наконец, в 2015 г. выходит работа, которую давно ожидали: С. Ши с коллегами предлагает Convolutional LSTM-сеть [43], предназначенную для обработки *пространственно-временных зависимостей*. Обобщённая структура данной сети, демонстрирующая идею, приведена на рис. 4.3.12. Основное отличие Convolutional LSTM-сети от обычной LSTM в том, что её внутренняя MLP-подобная структура (см. рис. 4.3.11) заменена на свёрточную.

В работе [43] продемонстрирована высокая эффективность ConvLSTM-сети при обработке данных с погодного радара.

¹ Дифференцируемый здесь означает поддержку нейросетевым слоем режима обучения алгоритмом обратного распространения ошибки.

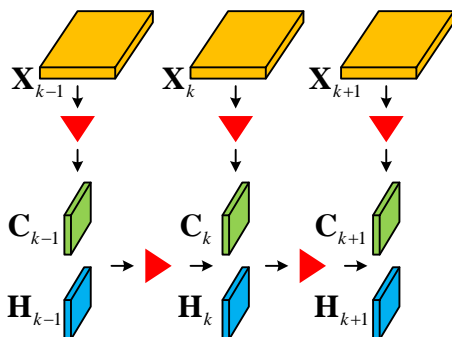


Рис. 4.3.12. Схема Convolutional LSTM-сети, треугольник – операция свёртки, остальные обозначения аналогичны рис. 4.3.10

Следом за работой [43] в том же году Н. Кальчбреннер с коллегами предлагает решётчатую LSTM-сеть [26]. Основная идея: расширение LSTM функционала с одной «временной оси» на все N осей входных данных, где $N = \dim \mathbf{X}$.

На протяжении 2016-2018 г.г. исследователи в основном экспериментировали с различными вариациями и комбинациями LSTM-сетей и их приложениями к реальным задачам.

6. Заключение

Итак, «естественный отбор» эффективных в прикладном плане архитектур ИНС привёл к тому, что к началу 2019 г. мейнстримом в глубоких нейросетях являются всего три качественно различающихся типа слоёв:

- *полносвязные* (по типу персептрона Румельхарта);
- *сверточные* (со всем многообразием их модификаций);
- *рекуррентные* (в основном LSTM и GRU [2]).

При этом полносвязные слои потеряли всякую самостоятельность. Они стоят, как правило, на выходе сети, представляя собой линейный классификатор (регрессор) сепарабельной задачи (см. теорему 1), которую формируют более выразительные (имеющие лучшие обобщающие свойства) свёрточные и рекуррентные слои.

Мощность (выразительность, обобщающая способность) свёрточных и рекуррентных слоёв по большей части объясняется тем, что они, в отличие от полносвязных архитектур, построенных по типу MLP, максимально задействуют при построении информативных признаков явную и/или скрытую структуру данных. Наглядный пример: распознавание изображений, голоса, построение языковых моделей. Примеры 1 и 2, приведённые выше, также демонстрируют этот аспект.

Следует отметить, что колоссальная «обобщающая способность» глубоких нейросетей формируется в основном за счёт широкой структурно-статистической вариативности и, как следствие, большого объёма обучающих данных. В этом вопросе, к сожалению, прогресс с 60-х годов XX века пока весьма слаб [5]. Поэтому такая процедура как *Data Augmentation* [2] является весьма востребованной в практике обучения глубоких ИНС.

Еще раз подчеркнем, что все приведённые выше в настоящем разделе теоремы формируют строгий математический фундамент теории ИНС – гарантируют решение задачи, но не являются конструктивными: они не дают путей решения задачи. И именно здесь начинается «нейросетевое искусство». Попытки формализовать этот процесс активно предпринимаются в рамках такой научной дисциплины как «Теория статистического обучения», ряд существенных результатов в которой был получен в своё время учёными ИПУ РАН В. Вапником и А. Червоненкинсом при разработке ими теории так называемой VC-размерности [3]. Правда, эти результаты к оцениванию характеристик глубоких нейронных сетей имеют очень ограниченную применимость.

Из приведённого выше материала становится отчётливо видно, что успех глубоких ИНС объясняется не только алгоритмическими и математическими прорывами¹. Есть ещё кое-что.

Во-первых, экспоненциальный рост вычислительных мощностей (наглядно демонстрируемый сравнением двух вариантов:

¹ Действительно, большинство теоретических результатов получено в конце XX века, а активный научный рост области начался после 2012 г.

Тор-1 суперкомпьютера начала XXI века и массивно-параллельного ускорителя (GPU) наших дней), обеспечил возможность приемлемой длительности обучения весьма сложных нейросетей.

ASCI White (X / 2000 г. – VI / 2002 г.)	GPU NVIDIA V100 (3-й квартал 2017 г.)
110 млн. \$ США, 12.3 ТФЛОПС	1 700 \$ США, 15.0 ТФЛОПС
6 МВт, 106 тонн	300 Вт, 370 г

Во-вторых, существенное снижение стоимости хранения цифровых данных и широкое распространение социальных сетей обеспечило экспоненциальный рост размеров датасетов различной природы (текст, фото, видео, звук, музыка и т.п.), на которых возможно тренировать нейросети.

В-третьих, с программно-алгоритмическим обеспечением в области Deep Learning сложилась уникальная ситуация, кардинально отличающаяся от принятых «правил игры» в других научно-технических областях: подавляющее большинство библиотек и фреймворков – бесплатно; исходный код основных библиотек и фреймворков – открыт; обучающие материалы – бесплатны и свободно доступны; функционируют широкие и отзывчивые группы поддержки – от уровня новичка и до топовой проблематики.

Вне рассмотрения остался ряд важных вопросов:

– два мощных и современных направления глубоких ИНС: *автоэнкодеры* – осуществляющие сжатие входных данных для представления их в *Latent-Space* (*скрытое пространство признаков и состояний*) и GAN – Generative Adversarial Network (генеративно-сопоставительные сети) – осуществляющие порождение данных посредством комбинации двух сетей: генератора и дискриминатора (осуществляет оценку правильности генерации). Заинтересованный читатель сможет найти о них подробную информацию в книге [2];

– обработка свёрточными сетями нерегулярных данных, к примеру взвешенных графов произвольной структуры;

- оптимизаторы и обучение сетей (здесь можно порекомендовать читателю постоянно обновляемый пост С. Рудера [41]).
- интерпретация решений ИНС;
- обучаемость и высокая эффективность глубоких ИНС.

Литература

1. БАРЦЕВ С., ОХОНИН В. *Адаптивные сети обработки информации*. – 1986. – Препринт №59Б. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. – 20 с.
2. БЕНДЖИО И., ГУДФЕЛЛОУ Я., КУРВИЛЛЬ А. *Глубокое обучение*. ДМК-Пресс, 2018. – 652 с.
3. ВАПНИК В.Н., ЧЕРВОНЕНКИС А.Я. *О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям* // Теория вероятн. и ее прим. – 1971. – Т. 16, В. 2. – С. 264–279.
4. ГАЛУШКИН А. *Синтез многослойных систем распознавания образов*. – М.: Энергия, 1974. – 368 с.
5. РОЗЕНБЛАТТ Ф. *Принципы нейродинамики: Перцептроны и теория механизмов мозга*. – М.: Мир, 1965. – 478 с.
6. BRIDLE J. *Probabilistic Interpretation of Feedforward Classification Network Outputs, with Relationships to Statistical Pattern Recognition* // In: Neurocomputing. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences) / F.F. Soulie, J. Hérault (eds). – Vol. 68. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1989. – P. 227–236
7. BROOMHEAD D., LOWE D. *Radial Basis Functions, Multi-variable Functional Interpolation and Adaptive Networks* // Technical report RSRE. – 1988. – 4148.
8. CHOW T., LI X. *Modeling of Continuous Time Dynamical Systems with Input by Recurrent Neural Networks* // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 2000. – Vol. 47, No. 4. – P. 575–578.
9. CIRESAN D., MEIER U., GAMBARDELLA L., SCHMIDHUBER J. *Deep Big Simple Neural Nets Excel on Handwritten Digit Recognition* // ArXiv: 1003.0358.

10. COVER T. *Geometrical and Statistical Properties of Systems of Linear Inequalities with Applications in Pattern Recognition* // IEEE Transactions on Electronic Computers. – 1965. – EC-14. – P. 326–334.
11. CYBENKO G. *Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function* // Mathematics of Control Signals and Systems. – 1989. – Vol. 2, No. 4. – P. 303–314.
12. ELMAN J. *Finding Structure in Time* // Cognitive Science. – 1990. – Vol. 14, No. 2. – P. 179–211.
13. FUKUSHIMA K. *Neocognitron: A Self-Organizing Neural Network Model for a Mechanism of Pattern Recognition Unaffected by Shift in Position* // Biological Cybernetics. – 1980. – Vol. 36, No. 4. – P. 193–202.
14. FUNAHASHI K., NAKAMURA Y. *Approximation of Dynamical Systems by Continuous Time Recurrent Neural Networks* // Neural Networks. – 1993. – Vol. 6, No. 6. – P. 801–806.
15. GLOROT X., BENGIO Y. *Understanding the Difficulty of Training Deep Feedforward Neural Networks* // Proc. of the 13th Int. Conference on Artificial Intelligence and Statistics. – 2010. – Vol. 9. – P. 249–256.
16. GRAVES A. *Generating Sequences With Recurrent Neural Networks* // ArXiv: 1308.0850.
17. GRAVES A., SCHMIDHUBER J. *Frame-wise Phoneme Classification with Bidirectional LSTM Networks* // Int. Joint Conference on Neural Networks. – 2005. – P. 2047–2052.
18. HE K., ZHANG X., REN S., SUN J. *Deep Residual Learning for Image Recognition* // ArXiv: 1512.03385.
19. HEBB D. *The Organization of Behavior*. – John Wiley & Sons, New York, 1949. – 335 p.
20. HINTON G. et al. *Improving Neural Networks by Preventing Co-Adaptation of Feature Detectors* // ArXiv: 1207.0580.
21. HINTON G., SALAKHUTDINOV R. *Reducing the Dimensionality of Data with Neural Networks* // Science. – 2006. – Vol. 313, No. 5786. – P. 504–507.
22. HOCHREITER S., SCHMIDHUBER J. *Long-Short Term Memory* // Neural Computation. – 1997. – Vol. 9, No. 8. – P. 1735–1780.

23. HORNIK K. *Approximation Capabilities of Multilayer Feed-forward Networks* // Neural Networks. – 1991. – Vol. 4, No. 2. P. 251–257.
24. IOFFE S., SZEGEDY C. *Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift* // ArXiv: 1502.03167.
25. JORDAN M. *Serial Order: A Parallel Distributed Processing Approach* // Advances in Psychology. – 1997. – No. 121. – P. 471–495.
26. KALCHBRENNER N., DANIHELKA I., GRAVES A. *Grid Long Short-Term Memory* // ArXiv: 1507.01526.
27. KRIZHEVSKY A., SUTSKEVER I., HINTON G. *ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks* // Proc. of the 25th Int. Conference NIPS. – 2012. – Vol. 1. – P. 1097–1105.
28. LeCUN Y., BOSER B., DENKER J., HENDERSON D., HOWARD R., HUBBARD W., JACKEL L. *Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition* // Neural Computation. – 1989. – Vol. 1, No. 4. – P. 541–551.
29. LeCUN Y., BOTTOU L., BENGIO Y., HAFFNER P. *Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition* // IEEE Intelligent Signal Processing. – 1998. – P. 306–351.
30. LIN M., CHEN Q., YAN S. *Network In Network* // ArXiv: 1312.4400.
31. MAKARENKO A. *Deep Learning Algorithms for Signal Recognition in Long Perimeter Monitoring Distributed Fiber Optic Sensors* // IEEE 26th Int. Workshop on MLSP. – 2016. – Vietri sul Mare, IIASS. – P. 1–6.
32. McCULLOCH W., PITTS W. *A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity* // Bull. Math. Biophys. – 1943. – Vol. 5. – P. 115–133.
33. MINSKY M., PAPERT S. *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*. – The MIT Press, Cambridge MA, 1969.
34. MORIN F., BENGIO Y. *Hierarchical Probabilistic Neural Network Language Model* // Proc. of AISTATS, 2005. – P. 246–252.

35. MOZER M. *Early Parallel Processing in Reading: A Connectionist Approach* // In: Attention and performance 12: The psychology of reading / M. Coltheart (Ed.) – 1987. – P. 83–104.
36. NAIR V., HINTON G. *Rectified Linear Units Improve Restricted Boltzmann Machines* // Proc. of the Int. Conference on Machine Learning. – 2010. – P. 807–814.
37. NIELSEN R. *Kolmogorov's Mapping Neural Network Existence Theorem* // Proc. of the IEEE First Int. Conference on Neural Networks (San Diego, CA). – 1987. – Vol. 3. – P. 11–13.
38. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition* / Ed. by D.E. Rumelhart, J.L. McClelland. – Cambridge, MA: MIT Press, 1986.
39. PORTSEV R., MAKARENKO A. *Convolutional Neural Networks for Noise Signal Recognition* // IEEE 28th Int. Workshop on MLSP, Aalborg. – 2018. – P. 1–6.
40. ROSENBLATT F. *The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain* // Cornell Aeronautical Laboratory / Psychological Review. – 1958. – Vol. 65, No. 6. – P. 386–408.
41. RUDER S. *An Overview of Gradient Descent Optimization Algorithms*. – URL: <http://ruder.io/optimizing-gradient-descent>.
42. RUMELHART D., HINTON G., WILLIAMS R. *Learning Internal Representations by Error Propagation* // In: Parallel Distributed Processing. – Vol. 1. – P. 318–362. – Cambridge, MA, MIT Press, 1986.
43. SHI X., CHEN Z., WANG H., YEUNG D., WONG W., WOO W. *Convolutional LSTM Network: A Machine Learning Approach for Precipitation Nowcasting* // ArXiv: 1506.04214.
44. SIEGELMANN H., SONTAG E. *Turing Computability with Neural Nets* // Appl. Math. Lett. – 1991. – Vol. 4, No. 6. – P. 77–80.
45. SIMONYAN K., ZISSERMAN A. *Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition* // ArXiv: 1409.1556.
46. SZEGEDY C., LIU W., JIA Y., SERMANET P., REED S., ANGUELOV D., ERHAN D., VANHOUCHE V., RABINOVICH A. *Going Deeper with Convolutions* // ArXiv: 1409.4842.

47. TIWARI S., SINGH A., SHUKLA V. *Statistical Moments Based Noise Classification Using Feed Forward Back Propagation Neural Network* // Int. J. of Computer Applications. – 2011. – Vol. 18, No. 2. – P. 36–40.
48. WERBOS P. *Beyond Regression: New Tools for Prediction and Analysis in the Behavioral Sciences*. – PhD thesis, Harvard University, 1974.
49. WIDROW B. *Pattern Recognition and Adaptive Control* // Proc. of the IRE-AIEE Joint Automatic Control Conference. – August 1962. – P. 19–26.

ГЛАВА 5. СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

5.В. ВВЕДЕНИЕ

Коргин Н.А.¹, Новиков Д.А.²

Индивидуальное принятие решений. Рассмотрим одного активного субъекта (человека, группу, коллектив, организацию и т.д.), принимающего решение, заключающееся в выборе альтернативы из заданного множества X . Результат выбора, в силу активности субъекта, зависит от его целей, интересов и предпочтений, которые обычно моделируются его целевой функцией $f(\cdot): X \rightarrow \mathbb{R}^1$ или отношением предпочтения $R \subseteq X \times X$. Рациональным в теории выбора и в теории принятия решений (см. [2, 6, 10, 14]) считается индивидуальный выбор альтернативы x^* , недоминируемой по отношению предпочтения ($\forall x \in X \ x^*Rx$) или максимизирующей целевую функцию: $x^* \in \text{Arg max}_{x \in X} f(x)$. Данное предположение называется гипотезой рационального поведения.

Если интерпретировать альтернативы как состояния субъекта, то в терминах ТАУ (см. раздел В.1 и [17]) осуществляемый им выбор есть не что иное, как управление своим состоянием. То есть одно из основных проявлений способности к стратегическому поведению – выбор субъектом наилучших с его точки зрения альтернатив.

Коллективное поведение. Если субъектов (в моделях принятия решений их чаще называют агентами) несколько, а состояние каждого в текущий момент времени известным образом зависит от его предыдущего состояния и, в общем случае, от текущих выборов всех агентов, то получаем модель коллектив-

¹ Николай Андреевич Коргин, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н. (nkorgin@ipu.ru).

² Дмитрий Александрович Новиков, Институт проблем управления им В.А. Трапезникова РАН; чл.-корр. РАН (novikov@ipu.ru).

ного поведения, для которой обычно исследуются традиционные для ТАУ вопросы устойчивости, оценки областей притяжения положений равновесия соответствующей динамической системы и др. (см. монографии [9, 13]).

В моделях коллективного поведения агенты в некотором смысле *пассивны* – зависимость состояний каждого агента от выборов других агентов считается известной. Для описания коллективного поведения *активных агентов* уже недостаточно определить их предпочтения и правила индивидуального рационального выбора каждого из них по отдельности.

Как отмечалось выше, в случае когда в системе имеется единственный агент, его рациональное индивидуальное поведение подразумевает, что агент ведет себя таким образом, чтобы зависящим от него выбором («управляемая» агентом переменная называется его *действием*) максимизировать значение своей целевой функции. Если агентов несколько, то целевая функция каждого в общем случае зависит от действий всех агентов, то есть необходимо учитывать их взаимное влияние: в этом случае возникает *игра* – взаимодействие, в котором *выигрыши* (значение целевой функции, полезности и т.п.) каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов.

Соответствующие модели исследуются в *теории игр* – разделе прикладной математики, исследующем модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах. Противопоставление интересов игроков формирует *конфликтную ситуацию*, и наоборот, совпадение интересов может приводить к *координации* их действий, то есть *кооперации* игроков.

Теория игр. Подчеркнем, что различают *азартные игры*¹ и *стратегические игры*. Первыми занимается в большей степе-

¹ *Зарождение теории игр как математической дисциплины можно датировать 29 июля 1654 г., то есть днем, когда Б. Паскаль написал известное письмо П. Ферма (это же письмо считается началом теории вероятностей) – см. [11]. Идеи, которые можно отнести к теоретико-игровым, высказывались на протяжении 17–19 вв. Д. Бернулли, П. Лапласом, П.Л. Чебышевым, Г. Минковским и др.*

ни теория вероятностей, вторыми – теория игр. Теория игр является сравнительно молодой наукой. Ее самостоятельная история насчитывает около века. В 1911 году Э. Цермело описал теоретико-игровой подход к шахматной игре, в 1921 году Э. Борель начал систематическое изучение матричных игр.

В 1928 году вышла в свет работа Дж. фон Неймана «К теории стратегических игр», содержащая основные идеи современной теории игр. В 1943 году, после публикации книги Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [11], теория игр окончательно сформировалась как самостоятельная наука.

В настоящее время теория игр – развитая математическая теория с большим количеством направлений и сложными взаимосвязями между ними. Общее представление о ней можно получить по любому из классических учебников [16, 20, 23].

Из всего многообразия теоретико-игровых моделей наиболее тесную связь с теорией автоматического управления имеют дифференциальные игры, в которых действия игроков являются управлениями по отношению к некоторой динамической системе (см. разделы 5.1 и 5.2). В остальных классах теоретико-игровых моделей можно условно считать, что управляемая система описывается или вектор-функцией, элементы которой – целевые функции отдельных игроков (в играх в нормальной форме), или некоторым функционалом от действий игроков (в кооперативных и др. играх).

Одним из оснований **системы классификаций** теоретико-игровых задач может служить количество сторон (или, как принято говорить, *игроков*), участвующих в конфликте (*игре*). Различают *игры двух лиц* (парные игры) и *игры многих лиц*¹. Игры двух лиц являются наиболее исследованной моделью, для них получено наибольшее число результатов (см., например, классическую монографию [4]). Тем не менее игры многих лиц привлекают не менее пристальное внимание исследователей,

¹ *Игры, в которых имеется один активный игрок, называются играми с природой и рассматриваются в основном в теории статистических решений.*

в первую очередь потому, что именно такие игры наиболее часто встречаются в задачах управления.

В зависимости от ограничений на выигрыши среди игр двух лиц различают игры *с нулевой суммой* (антагонистические игры), в которых сумма выигрышей игроков при каждом исходе равна нулю, и игры *с произвольной суммой*, в которых сумма выигрышей игроков может отличаться от нуля для всех или некоторых исходов игры.

Другим основанием классификации является информированность сторон. Существуют игры *с полной информированностью* и игры *с неполной информированностью* о различных параметрах игры – множестве игроков, множествах их допустимых выборов, целевых функциях, внешних параметрах и др. Среди игр с неполной информированностью можно выделить *рефлексивные игры* [12] (в которых существенна нетривиальная взаимная информированность игроков о существенных параметрах). Математический аппарат рефлексивных игр является основой для задач *информационного управления* (см. раздел 5.3).

По количеству повторений игры различают *однократные* и *динамические* игры. Динамические игры с дискретным временем называются *повторяющимися* играми [20].

Динамические игры, в которых динамика описывается дифференциальными или разностными уравнениями, называются *дифференциальными* играми [1, 7]. Дифференциальные игры, являющиеся наиболее близкими по математическому аппарату к классической теории управления [17], рассматриваются в разделе 5.1.

По мощности множества исходов и/или стратегий разделяют *дискретные* и *непрерывные* игры (в отличие от непрерывных игр, в дискретных играх множество исходов конечно).

По возможности совместных действий среди игр многих (то есть более двух) лиц различают *некооперативные* и *кооперативные* игры. Некооперативные игры – это класс моделей теории игр, в постановке которых предполагается, что в процессе выработки решений игроки не могут действовать совместно. Это значит, что запрещены договоры между игроками, передача игроками друг другу ресурсов и информации, образование каких-либо коалиций и пр. Наоборот, отличительной чертой

кооперативных игр является то, что при их исследовании решающее значение имеет возможность игроков вести совместные действия, объединяясь для этой цели в коалиции. Первоначальное представление о теории кооперативных игр можно получить по учебникам [10, 15]. Проблеме динамической устойчивости решений в динамических и дифференциальных кооперативных играх посвящен раздел 5.2.

Игры делятся по виду описания на *позиционные игры* (игры в развернутой форме) и *игры в нормальной форме* [16]. В большинстве моделей игр в нормальной форме принимается *порядок функционирования*, в соответствии с которым игроки выбирают стратегии одновременно. Рассмотрение последовательности ходов позволяет выделить *иерархические игры*. Теория иерархических игр [5] занимается изучением игровых моделей, в которых фиксирован порядок ходов игроков, то есть предписана последовательность, в которой игроки выбирают свои действия. Иерархические игры рассматриваются в разделе 5.3.

Для более полного ознакомления с проблематикой и результатами использования теоретико-игровых моделей (в том числе в задачах управления) можно рекомендовать учебники и монографии по «классической теории игр» [16, 20, 23], а также по:

– *поведенческой теории игр* (экспериментально исследующей поведение реальных агентов) [19];

– *эволюционным играм* [3], которые моделируют адаптивно-подражательные аспекты социального или биологического поведения;

– *алгоритмической/вычислительной теории игр*, изучающей децентрализованную реализацию игрового взаимодействия агентов на стыке с *теорией мультиагентных систем* (см. раздел 3.2) [18, 22], *распределенной оптимизацией* (см. раздел 2.2) и моделями коллективного поведения [3, 9, 13];

– *сетевым играм* и *играм на сетях* [8, 21], учитывающим возможную сетевую структуру взаимодействия игроков.

Литература

1. АЙЗЕКС Р. *Дифференциальные игры*. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
2. АЙЗЕРМАН М. А., АЛЕСКЕРОВ Ф. Т. *Выбор вариантов: основы теории*. – М.: Наука, 1990. – 236 с.
3. ВАСИН А.А. *Некооперативные игры в природе и обществе*. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 412 с.
4. ВОРОБЬЕВ Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры*. – М.: Физматлит, 1984. – 496 с.
5. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
6. КОЗЕЛЕЦКИЙ Ю. *Психологическая теория решений*. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
7. КРАСОВСКИЙ Н.Н., СУББОТИН А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. – М.: Физматлит, 1974. – 456 с.
8. МАЗАЛОВ В.В., ЧИРКОВА Ю.В. – СПб.: Лань, 2018. – 320 с.
9. МАЛИШЕВСКИЙ А.В. *Качественные модели в теории сложных систем*. – М.: Наука. Физматлит, 1998. – 528 с.
10. МУЛЕН Э. *Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели*. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
11. НЕЙМАН Д., МОРГЕНШТЕРН О. *Теория игр и экономическое поведение*. – М.: Наука, 1970. – 708 с.
12. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: Синтег, 2003. – 149 с.
13. ОПОЙЦЕВ В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*. – М.: Наука. 1977. – 248 с.
14. ОРЛОВ А.И. *Теория принятия решений*. – М.: Экзамен» 2005. – 656 с.
15. ОУЭН Г. *Теория игр*. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
16. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., ШЕВКОПЛЯС Е.В. *Теория игр*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
17. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.

18. *Algorithmic Game Theory* / Eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. – N.Y.: Cambridge University Press, 2009. – 776 p.
19. CAMERER C. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interactions*. – Princeton: Princeton University Press, 2003. – 544 p.
20. FUDENBERG D., TIROLE J. *Game Theory*. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
21. JACKSON M. *Social and Economic Networks*. – Princeton: Princeton University Press, 2008. – 648 p.
22. MANSOUR Y. *Computational Game Theory*. – Tel Aviv: Tel Aviv University, 2003. – 150 p.
23. MYERSON R. *Game Theory: Analysis of Conflict*. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

5.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Галяев А.А.¹

1. Введение

В конце 50-х – начале 60-х годов двадцатого века прикладные задачи военного характера, а именно сформировавшийся класс *задач преследования–уклонения*, определили возникновение нового раздела теории управления: теории дифференциальных игр. Основой для исследования задачи преследования одним или несколькими игроками одного убегающего стали фундаментальные работы советских научных школ Л.С. Понтрягина [11, 12, 19], Н.Н. Красовского [5, 14], киевских [13] и ленинградских [7, 9] математиков, а также зарубежных математиков Р. Айзекса [2], Л. Берковица, У. Флеминга и др.

В отличие от классических задач *оптимального управления*, в дифференциальной игре цели игроков противоположны, и каждый из игроков принимает решение о своем векторе управлений, считая, что остальные действуют наилучшим для них образом. В случае когда все игроки, кроме одного, фиксируют свое управление, получаем обычную экстремальную задачу.

В *дифференциальных играх* (термин был введен Р. Айзексом) эволюция состояния игроков описывается дифференциальными уравнениями или дифференциальными включениями, содержащими управляющие векторы, которыми распоряжаются игроки (имеются как минимум два субъекта управления, выбирающих каждый свои управляющие воздействия), цели которых диаметрально противоположны. Для выбора своего управления каждый игрок может использовать лишь текущую информацию о поведении игроков.

¹ Андрей Алексеевич Галяев, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; чл.-корр. РАН, д.т.н. (galaev@ipu.ru).

Дифференциальные игры классифицируются по:

- числу игроков (игры двух игроков, многих игроков, бесконечного числа игроков);
- динамике игроков (детерминированная, стохастическая, с переменной структурой, в том числе дифференциальные игры с ложной целью);
- информированности игроков (игры с полной и неполной информацией);
- классам управлений и применяемым стратегиям (линейные, линейно-выпуклые, линейно-квадратичные, позиционные и др.);
- цене игры (терминальные и не терминальные критерии);
- наличию геометрических и фазовых ограничений.

Наиболее исследованными являются *дифференциальные игры преследования*, в которых количество игроков равно двум, одного из них называют *догоняющим*, другого *убегающим*. Цель догоняющего: приведение вектора $z(t)$ – состояния системы – на заданное множество M за минимальное время; цель убегающего – по возможности отложить момент прихода вектора $z(t)$ на M .

2. Дифференциальная игра преследования двух игроков

Первым, кто исследовал дифференциальные игры, стал Руфус Айзекс (отчет RAND, 1951 г., впервые опубликован в 1965 году) [2]. Одна из первых проанализированных им игр – «Задача о шофере-убийце» (надо отметить, что сам Айзекс вместо «шофера» и «пешехода» имел в виду торпеду и уклоняющийся от неё небольшой катер). Полное решение задачи и исторический обзор можно найти в современных исследованиях [17, 18]

На плоскости \mathbb{R}^2 будем рассматривать аналогичную игру преследования двух игроков E и P , называемую «Задачей о двух автомобилях». Следуя традициям, назовем точку E *целью* (Evader, убегающий), а точку P – *преследователем* (Pursuer). Игра формируется противоположными целями игроков: один убегает, другой догоняет. Пусть v_E – модуль вектора *скорости*

5.1. Дифференциальные игры

игрока E , γ – его курс (угол между вектором скорости и осью x), а u_P – скорость игрока P , θ – соответственно его курс. Уравнения абсолютного движения имеют вид

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_E = v_E \cos \gamma, \\ \dot{y}_E = v_E \sin \gamma; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_P = u_P \cos \theta, \\ \dot{y}_P = u_P \sin \theta. \end{cases}$$

Уравнения относительного движения записываются в системе координат с центром в точке P :

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = u_P \cos \theta - v_E \cos \gamma, \\ \dot{y} = u_P \sin \theta - v_E \sin \gamma. \end{cases}$$

Переменные γ , θ , v_E , u_P играют роль функций управления (выбираемого соответствующими игроками), на которые наложены ограничения

$$(3) \quad \begin{aligned} 0 \leq v_E \leq a, \quad |\dot{\gamma}| \leq u_{max}, \\ 0 \leq u_P \leq b, \quad |\dot{\theta}| \leq v_{max}. \end{aligned}$$

Ограничения вида (3) задают Q – область допустимых управлений M . Эволюцию вектора относительного положения игроков удобно записывать через изменение его модуля D и ориентации ε (угол между отрезком PE с осью x) в следующем виде:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{D} = -u_P \cos(\varepsilon - \theta) - v_E \cos(\varepsilon - \gamma), \\ D\dot{\varepsilon} = u_P \sin(\varepsilon - \theta) - v_E \sin(\varepsilon - \gamma). \end{cases}$$

Обозначим через $v = (v_E, \gamma)$, $u = (u_P, \theta)$ векторы управлений игроков E , P . Критерием игры может являться T – первый момент времени при преследовании, в который выполняется равенство

$$(5) \quad D(T) = l,$$

где l – наперед заданное положительное число, $D^2 = x^2 + y^2$ – квадрат расстояния между игроками. Этот момент времени T называется терминальным. В общем случае значение критерия игры G называется ее ценой и задается функционалом, завися-

щим от траекторий движения игроков. В текущей постановке в предположении, что преследование началось в нулевой момент времени, критерий (цена игры или платежный функционал) принимает вид

$$(6) \quad G(v(\cdot), u(\cdot)) = T.$$

В пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ позиций игроков обозначим совместный вектор позиций игроков $z(t)$. Соответственно уравнения движения (1) примут вид

$$(1^*) \quad \dot{z}(t) = w(z(t), u(t), v(t)).$$

Тогда равенство (5) задает терминальную поверхность, на которой заканчивается дифференциальная игра. Ясно, что убегающий, выбирая свое управление в виде вектора скорости и его модуля, старается не позволить преследователю выполнить поставленную задачу и отдалить терминальный момент времени T вплоть до бесконечности. Поэтому задача убегающего игрока заключается в том, чтобы обеспечить

$$(7) \quad \max_v \min_u G,$$

а задача преследователя записывается в виде

$$(8) \quad \min_u \max_v G.$$

В случае когда значения выражений (7) и (8) совпадают, говорят, что у дифференциальной игры (1), (3), (5)–(8) существует решение на траекториях движения игроков, на которых достигается это равенство. Возможность равенства этих значений другу другу обсудим позднее.

В процессе преследования–уклонения могут появляться дополнительные голономные и неголономные ограничения, накладываемые на траектории движения игроков, также могут изменяться количество игроков и их возможности к маневрированию. Более того, по достижению некоторой области преследователь и убегающий могут меняться местами, что в совокупности с исходной формулировкой значительно затрудняет решение задачи или даже делает невозможным ее решение в предложенной постановке.

3. О существовании седловой точки по управлению (u, v) для функционала G

Обсудим общую постановку задачи. Динамика системы определяется дифференциальными уравнениями движения вида (1*), зависящими от управлений (u, v) . Считаем, что сами управления являются кусочно-непрерывными функциями, значения которых удовлетворяют ограничениям вида (3). Такие управления называются *допустимыми*. Терминальное условие (5) задает граничные условия в виде некоторого терминального множества M . Все эти условия с предположением о полной информированности игроков друг о друге идентичны формулировке задачи оптимального управления [10] с терминальным критерием. Действительно, если зафиксировать вектор управлений v из множества допустимых управлений, то, как следствие, имеем обычную задачу Майера на минимум функционала (6), зависящего от параметра v :

$$(9) \quad G_v = \min_u G(u, v)|_v.$$

Теперь можно поставить задачу на максимум функционала G_v , зависящего от $v(\cdot)$, и, решив ее, найти экстремаль, на которой будет выполнено (обозначения взяты из [18])

$$(10) \quad J_{uv} = \max_v G_v = \max_v \min_u G(u, v).$$

Поскольку переменные (u, v) входят в функционал (6) равноправно, то вышеприведенные рассуждения справедливы при их перестановке местами. Тогда получаем, что

$$(11) \quad \tilde{J}_{uv} = \min_u G_u = \min_u \max_v G(u, v).$$

Равенство

$$(12) \quad J_{uv} = \tilde{J}_{uv}$$

по определению возможно, если у исследуемого функционала существует *седловая точка* (u, v) . Известно, что для дискретных парных игр справедлива теорема Неймана о существовании решения (стратегии) игры. Поэтому стратегию (u, v) , доставляющую равенство (12), будем называть *чистой стратегией*. Управление (u^0, v^0) , доставляющее минимакс выражению (11),

назовем *оптимальной стратегией*, а значение критерия (11) – *минимаксом*.

4. Постановки задач дифференциальной игры

Таким образом, сделаны все приготовления, чтобы сформулировать простейшую игру в рамках теории непрерывных дифференциальных парных игр:

Задача 1. Найти минимакс функционала (11) на множестве допустимых функций (1), множестве допустимых управлений (3) и при ограничениях вида (5).

Другие постановки дифференциальной игры возникают, если рассматривать игру либо со стороны догоняющего, либо со стороны убегающего. При этом в первом случае по Л.С. Понтрягину [11, 12] предполагается, что догоняющий в момент времени t знает:

- 1) динамические возможности всех игроков (то есть их уравнения движения и множество допустимых управлений);
- 2) начальное состояние игры $z(0)$;
- 3) управление убегающего $v(s)$ при $s \in [0, t]$.

Отображение $u(t) = U(z(0), v(\cdot))$, задаваемое на множестве произвольных измеримых функций $v(t) \in Q, t \geq 0$, будет определять стратегию догоняющего. Также потребуем, чтобы для произвольной измеримой $v(t) \in Q, t \geq 0$, функция $u(t) = U(z(0), v(\cdot))$ была измерима по t и $u(t) \in Q$.

В этом случае формулируем *задачу преследования* в следующем виде.

Задача 2. Найти множество начальных позиций $z(0)$, для которых догоняющий обладает такой стратегией U , что она обеспечивает успешное окончание преследования для произвольной измеримой $v \in Q$ не позже некоторого конечного момента времени T .

Такие позиции $z(0)$ будем называть решениями задачи 2, а время $T = T(z(0))$ – *временем преследования*, за которое преследователь осуществляет поимку убегающего.

При рассмотрении задачи со стороны убегающего предполагается, что убегающий в момент времени t знает:

- 1) динамические возможности игроков (то есть их уравнения движения и множество допустимых управлений);
- 2) начальное состояние игры $z(0)$;
- 3) управление догоняющего $u(s)$ при $s \in [0, t]$.

Отображение $v(t) = V(z(0), u(\cdot))$, задаваемое на множестве произвольных измеримых функций $u(t) \in Q, t \geq 0$, будет определять стратегию убегающего. Также потребуем, чтобы для произвольной измеримой $u(t) \in Q, t \geq 0$, функция $v(t) = V(z(0), u(\cdot))$ была измерима по t и $v(t) \in Q$.

В этом случае формулируем задачу убегания в следующем виде.

Задача 3. Найти множество начальных позиций $z(0)$, для которых убегающий обладает такой стратегией V , что она обеспечивает бесконечное время преследования догоняющим, что означает для произвольной измеримой $u \in Q$ все будущие позиции $z(t) \notin M$ для всех $t \geq 0$.

Если такие позиции $z(0)$ существуют, то их называют решениями задачи 3.

Еще одна задача, имеющая приложение на практике, это:

Задача 4. Для дифференциальной игры с заданным терминальным множеством M найти такую глобальную стратегию убегающего, что из всех начальных позиций $z(t) \notin M$ эта стратегия обеспечивала бы бесконечное время преследования.

Стратегия, полученная при решении задачи 4, называется *глобальной стратегией убегания*.

Выше приведены основные постановки, возникающие при формализации задач в теории дифференциальных игр. Практические приложения зачастую накладывают более разнообразные условия на возможности игроков, а именно на знание в каждый момент времени управлений игроков. Более того, знание игроками функций управления как функций, зависящих от времени, в качестве чистых стратегий делает невозможным достижения цели игры при изменении стратегии поведения, например, убегающего. Поэтому стратегии игры стремятся найти как функции текущих позиций игроков. Такой позиционный способ управления использует процедуры *управления с поводырем* Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [5].

5. Принцип максимума в дифференциальной игре

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана, который утверждает, что «Если взять текущий момент времени за начальный, то на оптимальных стратегиях управления последующее поведение системы должно быть оптимальным по заданному критерию.»

Приведем необходимые условия существования минимакса в задаче 1. Оказывается, что они могут быть получены в форме принципа максимума [10]. Обозначим через z^0, u^0, v^0 экстремали рассматриваемой задачи. Также будем считать, что набор z, u, v задает возможные управления и соответствующие им траектории движения игроков. Допустимые вариации записываются в виде разностей $\Delta u = u^0 - u, \Delta v = v^0 - v$.

Теорема 1. Пусть $H(\Psi, z, u, v) = \Psi \cdot w(z, u, v)$. Тогда для того, чтобы траектория z^0 , сформированная при управлениях u^0, v^0 , доставляла сильный минимакс функционалу (6), необходимо существование ненулевого непрерывного вектора Ψ , задаваемого уравнениями сопряженной системы

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial z};$$

при этом

- 1) функция H достигает максимума по u и минимума по v ;
- 2) выполняется условие трансверсальности

$$[\delta G - H \delta t + \Psi \delta z]_0^T = 0.$$

Примечание 1. Для внутренних точек множества Q справедливо обычное условие минимума или максимума функции H , то есть $\frac{\partial H}{\partial v} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial^2 v} > 0$ или $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} < 0$. Для граничных точек множества Q условие минимума или максимума означает точную нижнюю или верхнюю грани H на Q .

Примечание 2. При выполнении условий Вейерштрасса – Эрдемана справедливо [6]

$$\Psi^{(+)} = \Psi^{(-)}, \quad H^{(+)} = H^{(-)}$$

в точках разрыва управлений u, v . Знаки $+, -$ означают пределы соответствующих функций справа и слева.

Примечание 3. Уравнения сопряженной системы совместно с уравнениями динамики (1^*), заданными при u^0, v^0 , называются *уравнениями характеристик*.

Доказательство теоремы 1 опирается на вычисление полной вариации дополнительного функционала

$$S = G(z) + \int_0^T (\Psi \cdot \dot{z} - H) dt,$$

в который совпадает с исходным, поскольку интегральное слагаемое обращается в нуль на траекториях движения игроков, см. [6].

6. Решение задачи 1

Задачу о преследовании в парной дифференциальной игре будем рассматривать на заданных скоростях движения игроков при условии $u_P > v_E$ и так называемых *ограничениях на разворот* (на «угловые скорости»). Введем стандартные обозначения $z_1 = D, z_2 = \varepsilon, z_3 = \theta, z_4 = \gamma$. Уравнения динамики принимают вид

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = -u_P \cos(z_2 - z_3) + v_E \cos(z_2 - z_4), \\ \dot{z}_2 = \frac{1}{z_1} (u_P \sin(z_2 - z_3) - v_E \sin(z_2 - z_4)), \\ \dot{z}_3 = u, \\ \dot{z}_4 = v; \end{cases}$$

с начальными условиями в нулевой момент времени

$$(14) \quad z_1(0) = z_{1_0}, \quad z_2(0) = z_{2_0}, \quad z_3(0) = z_{3_0}, \quad z_4(0) = z_{4_0}.$$

Допустимые управления находятся в области Q , задаваемой неравенствами

$$(15) \quad \begin{cases} |u| \leq u_{max}, \\ |v| \leq v_{max}. \end{cases}$$

Игра заканчивается в момент времени T на терминальной поверхности

$$(16) \quad \begin{aligned} z_1(T) = D(T) = l = s_1, \quad z_2(T) = \varepsilon(T) = s_2, \\ z_3(T) = \theta(T) = s_3, \quad z_4(T) = \gamma(T) = s_4, \end{aligned}$$

на которой только первая из переменных оказывается заданной, а все остальные могут принимать произвольные значения.

Используя уравнения системы (13), выпишем явный вид функции H :

$$H(\Psi, z, u, v) = \Psi_1(-u_p \cos(z_2 - z_3) + v_E \cos(z_2 - z_4)) + \\ + \frac{\Psi_2}{z_1}(u_p \sin(z_2 - z_3) - v_E \sin(z_2 - z_4)) + \Psi_3 u + \Psi_4 v.$$

Из теоремы 1 из условия минимума и максимума функции H по соответствующим управлениям следует оптимальный закон управления

$$(17) \quad u^0 = -u_{max} \cdot \text{sign } \Psi_3, \quad v^0 = v_{max} \cdot \text{sign } \Psi_4.$$

Вследствие того, что $G = \int_0^T dt$, условие постоянства функции H на экстремальных играх, записывается в виде

$$(18) \quad \Psi_1(-u_p \cos(z_2 - z_3) + v_E \cos(z_2 - z_4)) + \\ + \frac{\Psi_2}{z_1}(u_p \sin(z_2 - z_3) - v_E \sin(z_2 - z_4)) - |\Psi_3| u_{max} + |\Psi_4| v_{max} + 1 = 0.$$

Уравнения сопряженной системы формируются следующим образом

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{\Psi}_1 = (u_p \sin(z_2 - z_3) - v_E \sin(z_2 - z_4)) \frac{\Psi_2}{z_1}, \\ \dot{\Psi}_2 = (-u_p \sin(z_2 - z_3) + v_E \sin(z_2 - z_4)) \Psi_1 - \\ - (u_p \cos(z_2 - z_3) - v_E \cos(z_2 - z_4)) \frac{\Psi_2}{z_1}, \\ \dot{\Psi}_3 = u_p \sin(z_2 - z_3) \Psi_1 + u_p \cos(z_2 - z_3) \frac{\Psi_2}{z_1}, \\ \dot{\Psi}_4 = -v_E \cos(z_2 - z_4) \Psi_1 - v_E \sin(z_2 - z_4) \frac{\Psi_2}{z_1}. \end{cases}$$

Далее воспользуемся условиями трансверсальности из теоремы 1 и вычислим значения сопряженных переменных в конечный момент времени T . Поскольку выполнено (16), то вари-

ации второй, третьей и четвертой компоненты вектора состояния равны нулю, то есть

$$(20) \quad H|_T = 1, \quad \Psi_2|_T = 0, \quad \Psi_3|_T = 0, \quad \Psi_4|_T = 0.$$

Из (20) и (18) следует, что

$$(21) \quad \Psi_1|_T = \frac{1}{u_P \cos(s_2 - s_3) - v_E \cos(s_2 - s_4)} = A(s).$$

Поскольку величина, стоящая в знаменателе, является скоростью сближения игроков при достижении терминальной поверхности, то в момент времени T она будет положительной. Действительно, в противном случае убегающий игрок имел бы возможность продолжать игру и после момента T , что противоречит минимальности критерия.

Уравнения (19) могут быть проинтегрированы в обратном времени с начальными условиями (20), (21). Для этого воспользуемся первыми двумя уравнениями в системе (13), тогда для первых двух уравнений системы (19) получим компактный вид

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{\Psi}_1 z_1 = \dot{z}_2 \Psi_2, \\ \left[\frac{\Psi_2}{z_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Psi_2}{z_1} \right) + \Psi_1 \frac{d\Psi_1}{dt} \right] = 0. \end{cases}$$

Из (22) следует, что

$$(23) \quad \left(\frac{\Psi_2}{z_1} \right)^2 + \Psi_1^2 = A^2(s),$$

$$\Psi_1 = A(s) \cos(z_2 - s_2), \quad \Psi_2 = A(s) z_1 \sin(z_2 - s_2).$$

Запишем совместно оставшиеся уравнения систем (13) и (19)

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{z}_3 = -u_{max} \operatorname{sign} \Psi_3, \\ \dot{z}_4 = v_{max} \operatorname{sign} \Psi_4, \\ \dot{\Psi}_3 = A(s) u_P \sin(s_2 - z_3), \\ \dot{\Psi}_4 = -A(s) v_E \sin(s_2 - z_4). \end{cases}$$

Откуда получаем явный вид для Ψ_3 :

$$(25) \quad \Psi_3 = B [\cos(z_3 - s_2) - \cos(s_3 - s_2)],$$

где $B = -A(s) \frac{u_P}{u_{max}}$ при $\Psi_3 > 0$ и $B = A(s) \frac{u_P}{u_{max}}$ при $\Psi_3 < 0$.

Выпишем решение уравнений (25) для функции Ψ_3 и аналогичное решение для функции Ψ_4 в мультипликативной форме

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_3 = 2A(s) \frac{u_P}{u_{max}} \sin\left(\frac{z_3 + s_3 - 2s_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_3 - s_3}{2}\right) \text{ при } \Psi_3 > 0, \\ \Psi_3 = -2A(s) \frac{u_P}{u_{max}} \sin\left(\frac{z_3 + s_3 - 2s_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_3 - s_3}{2}\right) \text{ при } \Psi_3 < 0, \\ \Psi_4 = 2A(s) \frac{v_E}{v_{max}} \sin\left(\frac{z_4 + s_4 - 2s_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_4 - s_4}{2}\right) \text{ при } \Psi_3 > 0, \\ \Psi_4 = -2A(s) \frac{v_E}{v_{max}} \sin\left(\frac{z_4 + s_4 - 2s_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_4 - s_4}{2}\right) \text{ при } \Psi_3 < 0. \end{array} \right.$$

В выражениях (26) переключение управлений u, v происходит независимо друг от друга по достижению координат z_3, z_4 поверхностей переключения, а именно, для z_3 либо при $z_3 = s_3$, либо при $z_3 = 2s_2 - s_3$, аналогичные соотношения выписываются для z_4 . Оказывается, что знак у выражений $\sin\left(\frac{z_3 + s_3 - 2s_2}{2}\right)$ и

$\sin\left(\frac{z_3 - s_3}{2}\right)$ должен быть одинаковым. Данный факт приводит

к формированию двух множеств M_1 и M_2 , определяемых системой неравенств

$$(27) \quad M_1 = \left\{ \pi N \leq \frac{z_3 + s_3 - 2s_2}{2} \leq \pi(N + 1), \quad \pi N \leq \frac{z_3 - s_3}{2} \leq \pi(N + 1) \right\},$$

$$N \in \mathbb{Z};$$

или

$$(28) \quad M_1 = \{ 2\pi N + 2s_2 - s_3 \leq z_3 \leq 2\pi(N + 1) + 2s_2 - s_3,$$

$$2\pi N + s_3 \leq z_3 \leq 2\pi(N + 1) + s_3 \}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Далее, поскольку переменные z_2, z_3, z_4 являются угловыми координатами, то без потери общности их можно рассматривать в диапазоне $[0, 2\pi]$ и записать множества M_1 и M_2 в следующем виде:

$$(29) \quad \begin{aligned} M_1 &= \{2s_2 - s_3 \leq z_3, s_3 \leq z_3\}; \\ M_2 &= \{2s_2 - s_3 \geq z_3, s_3 \geq z_3\}. \end{aligned}$$

Легко показать, что если игра начинается в M_1 при условиях $s_2 \leq s_3$ и $s_3 \leq z_3$, то она ведется в течение всего времени T на подмножестве M_1 . Аналогично, если игра начинается в M_2 при условиях $s_2 \geq s_3$ и $s_3 \geq z_3$, то она ведется в течение всего времени T на подмножестве M_2 .

Оптимальная стратегия по u имеет следующий вид:

$$(30) \quad \begin{aligned} u &= -u_{max} \quad \text{при} \quad z_3 > s_3 \geq s_2; \\ u &= +u_{max} \quad \text{при} \quad z_3 < s_3 \leq s_2; \\ u &= 0 \quad \text{при} \quad z_3 = s_3 = s_2. \end{aligned}$$

По аналогии получаем, что оптимальная стратегия по v имеет вид

$$(31) \quad \begin{aligned} v &= -v_{max} \quad \text{при} \quad z_4 > s_4 \geq s_2; \\ v &= +v_{max} \quad \text{при} \quad z_4 < s_4 \leq s_2; \\ v &= 0 \quad \text{при} \quad z_4 = s_4 = s_2. \end{aligned}$$

Выражения (30), (31) определяют оптимальные законы управления и позволяют по ним построить оптимальные траектории, которые состоят из двух типов кривых: окружностей

радиусов $R_p = \frac{u_p}{u_{max}}$, $R_E = \frac{v_E}{v_{max}}$ и отрезков прямых. Конкретные

законы движения игроков зависят от ограничений, параметров игроков, начальных позиций и терминальных условий. В частности, оптимальное преследование–уклонение может состоять из участка разворота игроков вплоть до момента совпадения направлений их векторов скоростей и вектора относительного положения, после которого движение происходит по прямой до окончания игры. Траектории движения игроков показаны на рис. 5.1.1.

На рис. 5.1.2, который взят из [18], для задачи «шофер–убийца» приводится функция цены и проекция ее линий уровня на плоскость относительных позиций игроков. Рисунок показывает возможное устройство линий уровня цены игры.

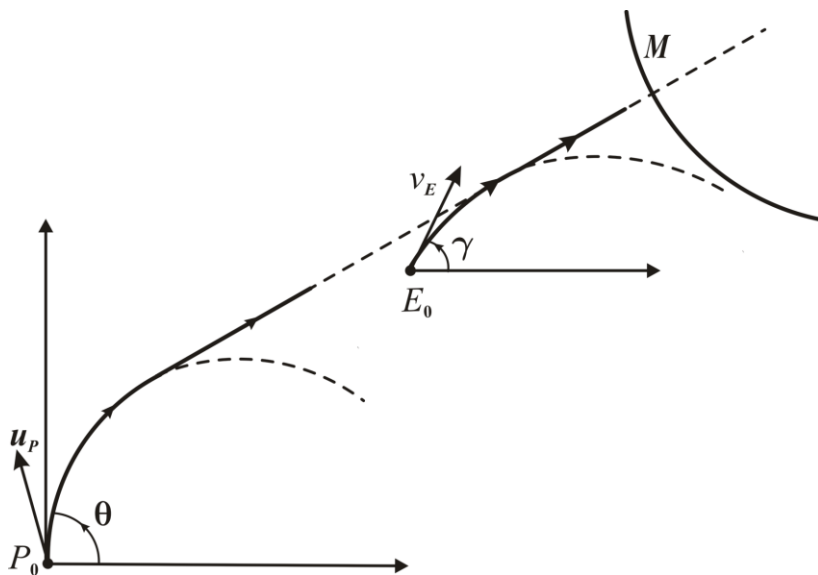


Рис. 5.1.1. Оптимальные траектории игроков

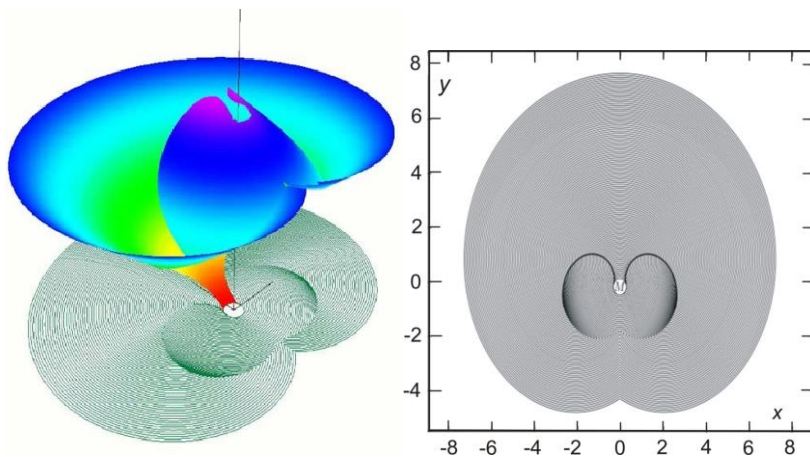


Рис. 5.1.2. Функция цены и ее проекция при $\frac{v_E}{u_p} = 0,3$, $l = 0,3$

7. Задачи группового преследования

Из решения задачи 1 видно, что даже в случае парной игры возникает сложная и разнообразная динамика поведения игроков, требующая дополнительных исследований. Как задача группового преследования, отдельного обсуждения заслуживает дифференциальная игра преследования несколькими игроками одного убегающего. В такой задаче для объектов, обладающих простыми движениями, Б.Н. Пшеничным [13] получены необходимые и достаточные условия поимки в случае равных динамических возможностей объектов при отсутствии фазовых ограничений, а Р.П. Ивановым в [4] – в случае наличия фазовых ограничений. Для нее же Ф.Л. Черноусько в [3] показал возможность уклонения, когда убегающий имеет большие динамические возможности по сравнению с каждым из преследователей.

Увеличим количество убегающих до двух. Результатами игры могут быть ситуации, когда убегают оба убегающих; преследователи выбирают, какого из убегающих ловить, при этом другой убегающий убегает; один из двух убегающих убегает в любом случае, а второго преследователи ловят. В дифференциальной игре трех преследователей и двух убегающих, когда динамика игроков описывается простыми движениями с одинаковыми возможностями [3], приводятся множества начальных позиций, дающие один из приведенных выше результатов.

Одним из методов решения задач группового преследования является способ *гарантированного неухудшения позиции*, позволяющий выбирать стратегию преследования так, чтобы позиция хотя бы для одного преследователя относительно убегающего строго улучшалась, а каждого из остальных преследователей не ухудшалась. Этот метод эффективно применяется, если динамические возможности преследователей мало отличаются от динамических возможностей убегающего. В случае когда инерционность преследователей больше инерционности убегающего, используется *метод покрытия*. Стратегии преследователей должны быть такими, чтобы их терминальные множества, образованные текущими позициями, покрывали область неопределенности убегающего.

Если в дифференциальной игре участвуют преследователи как с более высокой инерционностью или динамическими возможностями, чем возможности убегающего, так и с меньшими возможностями, то групповая стратегия разделяет преследователей на *загонщиков* и *ловцов*. Убегающий вынужден, уклоняясь от более подвижных игроков, ухудшать свою позицию и сближаться с другими преследователями. Для решения задачи преследования группой преследователей одного убегающего в случае, когда часть преследователей обладает равными с убегающим динамическими возможностями, в [3] предложен метод прочесывания. Стратегия поимки включает в себя разделение преследователей на две группы, одна из которых блокирует убегающего в некоторой области фазового пространства, а вторая осуществляет ее заметание, обеспечивающее требуемые терминальные условия.

Самый общий случай возникает в дифференциальной игре, когда среди преследователей имеются три группы игроков с равными или отличными (хуже или лучше) динамическими возможностями по сравнению с убегающим. Тогда стратегия преследования выделяет те же три группы игроков, первая из которых ограничивает действия убегающего, блокируя его нахождение в некоторой области, вторая (загонщики) сужает область позиций убегающего, а третья группа ведет поиск убегающего в заданном районе. Обобщая все рассмотренные методы, стоит сказать, что они имеют разную интерпретацию стратегий поиска, поимки и уклонения.

Комплексирование различных методов поимки может происходить в *дифференциальной игре с переменной структурой* при групповом преследовании одного убегающего. В таких задачах дополнительным управлением становится выбор структуры игры. Например, к играм с переменной структурой можно отнести задачу поочередной поимки на плоскости одним преследователем P двух убегающих E_A и E_B за минимальное время [1]. Возможность управления по индексу k (выбор преследователем очередности встреч) составляет специфику данной игры. Очередность же встреч (управление по индексу k) можно выбирать по-разному:

- 1) в момент $t = 0$ начала преследования, то есть программно;
- 2) в процессе преследования, как функцию текущих позиций игроков, то есть позиционно.

При определенных начальных позициях игроков этапу очередного преследования предшествует этап совместного преследования, в течение которого P держит убегающих игроков в условиях неопределенности относительно предстоящей очередности встреч. В [1] определены условия, при которых расширение класса программных по индексу k управлений до класса позиционных не уменьшает цены игры.

С точки зрения приложений необходимы конструктивные процедуры нахождения начальных позиций, для которых разрешима задача преследования, развитие методов и алгоритмов построения стратегий преследования, способов и процедур вычисления гарантированного времени преследования.

8. Дифференциальные игры с неполной информацией

Отдельным разделом теории дифференциальных игр являются игры с *неполной информацией*, к которым относятся *игры поиска* [2, 8]. В качестве решения такой игры появляются *смешанные стратегии*, которые по аналогии с *антагонистической игрой* состоят в выборе игроками определенного вероятностного распределения на множестве своих чистых стратегий. Существенная роль в таких задачах отведена именно постановке задачи, а также видам и источникам информации, используемым при формировании стратегии. Информация о противнике может поступать по каналам наблюдений. Такая информация поступает с ошибками, возникающими, например, вследствие несовершенства аппаратуры и наличия помех. Также в процессе игры дополнительную информацию может предоставить ее предыстория.

Развитием теории дифференциальных игр является относительно новое направление – теория *игр среднего поля* [16]. В них поведение игроков также описывается системой дифференциальных уравнений, однако количество игроков бесконечно.

Такой подход актуален в экономических, биологических и финансовых приложениях. Отличительной особенностью игр среднего поля является независимость макровеличин системы от действий отдельных игроков: значение имеет только «среднее поле» игроков. Каждый игрок должен оптимизировать свое поведение в соответствии с агрегатным состоянием других игроков. Решение таких задач ищется в терминах равновесия по Нэшу. Метод основан на совместном решении уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана для терминального момента времени и уравнения Колмогорова в начальный момент.

Литература

1. АБРАМЯНЦ Т.Г., МАСЛОВ Е.П., РУБИНОВИЧ Е.Я. *Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №2. – С. 5–15.
2. АЙЗЕКС Р. *Дифференциальные игры*. – М.: Мир, 1967. – 479 с.
3. ГРИГОРЕНКО Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»*. – М: Изд-во МГУ, 1990. – 197 с.
4. ИВАНОВ Р.П. *Простое преследование – убежание на компакте* // ДАН СССР. – 1980. – Т. 254, №6. – С. 1318–1321.
5. КРАСОВСКИЙ Н.Н., СУББОТИН А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. – М.: Наука, 1974, - 456 с.
6. ЛЕТОВ А.М. *Динамика полета и управление*. – М.: Наука, 1969. – 359 с.
7. ПЕТРОСЯН Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. – Л.: Из-во ЛГУ, 1977. – 244 с.
8. ПЕТРОСЯН Л.А., ГАРНАЕВ А.Ю. *Игры поиска*. – СПб.: Изд-во С-Пб. ун-та, 1992. – 216 с.
9. ПЕТРОСЯН Л.А., ТОМСКИЙ Г.В. *Геометрия простого преследования*. – Новосибирск: Наука, 1983. – 143 с.
10. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 504 с.

11. ПОНТРИЯГИН Л.С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Мат. сб. – 1980. – Т. 112, №3. – С. 307–330.
12. ПОНТРИЯГИН Л.С. *Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры* // Тр. МИАН СССР. – 1985. – №169. – С. 119–158.
13. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. – 1976. – №3. – С. 145–146.
14. СУББОТИН А.И., ЧЕНЦОВ А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления*. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
15. ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л. *Одна задача уклонения от многих преследователей* // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40, №1. – С. 14–24.
16. AVERBOUKH Y. *First Order mean Field Games. Main Directions* // Proc. of the 47th Int. Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, 2016. – P. 42–61.
17. PACHER M., COATES S. *The Classical Homicidal Chauffeur Game* // Dyn Games Appl. – May, 2018. – 51 p. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s13235-018-0264-8>.
18. PATSKO V.S., TUROVA V.L. *Homicidal Chauffeur Games: history and modern studies* // Scientific report. Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, 2009. – 42 p.
19. PONTRYAGIN L.S. *Mathematical Theory of Optimal Processes*. – N.Y.: CRC Press, 1987. – 360 p.

5.2. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Петросян Л.А.¹

1. Введение

Теория кооперативных игр достаточно хорошо развита, и в этой области прикладной математики к настоящему времени опубликованы тысячи статей и сотни монографий. Однако в подавляющем большинстве случаев публикации касаются статических или одновременных игр. В предлагаемом разделе определение кооперативной игры дается с основным упором на динамические и дифференциальные кооперативные игры, представляющие собой модели кооперативного поведения конфликтующих сторон на длительном временном интервале. Как и в целом в теории игр, здесь важными являются вопросы определения приемлемого принципа оптимальности (то есть определение того, что считать оптимальным поведением участников конфликта – игроков), доказательство существования сформулированного принципа оптимальности и возможность его конструктивного построения и реализации в процессе игры. Однако при рассмотрении конфликтно-управляемых процессов, развивающихся во времени, возникает новая проблема – динамической устойчивости или состоятельности во времени выбранных на основе того или иного принципа оптимальности решений. Эта проблема состоит в том, что решение, найденное в начале игры на основе согласованного участниками конфликтно-управляемого процесса принципа оптимальности, может оказаться не удовлетворяющим этому принципу в процессе реализации выбранного решения. Ниже рассмотрены вопросы, связанные с построением различных принципов оптимальности в динамических и дифференциальных играх и описано решение проблемы динамической устойчивости (состоятельности

¹ *Леон Аганесович Петросян, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, д.ф.-м.н., профессор (l_petrosyan@spbu.ru).*

во времени) решений, порожденных тем или иным принципом оптимальности.

2. Определение кооперативного решения

В широком смысле под кооперативным решением будем понимать решение нескольких участников (сторон, лиц, игроков), объединенных необходимостью или желанием принятия решения по актуальной проблеме, требующего согласования их интересов и закрепленное соглашением [2]. Таким образом, в широком смысле речь идет фактически о любом *согласованном решении заинтересованных сторон*.

Проблемы принятия кооперативных решений возникают в различных областях человеческой деятельности. Это и проблема подписания контракта как результата согласования интересов сторон, соглашения по слиянию или поглощению, соглашения по образованию стратегических альянсов и другие типы соглашений по межфирменной кооперации, международная кооперация на политическом и хозяйственном уровнях, долгосрочные соглашения между собственниками и менеджерами о распределении прибыли. Можно привести и много других примеров. При этом кооперативные решения могут быть в форме юридического контракта или соглашения, законные и незаконные, с явными или тайными целями. Возможны и более сложные варианты кооперативного соглашения.

При анализе и принятии кооперативного решения обычно рассматривается несколько аспектов. Во-первых, какая имеется у заинтересованных сторон мотивация для принятия согласованного решения? Если таковая имеется, то является ли она достаточной? Часто в качестве такой мотивации выступают категории выгоды и справедливости согласованного решения. Во-вторых, какое согласованное решение следует выбрать в качестве оптимального (какой выбрать принцип оптимальности)? Как выбрать оптимальное решение (каков механизм выбора решения)? В-третьих, как реализовать процесс выполнения решения во времени так, чтобы достичь результатов кооперации? Нас будет особенно интересовать поведение кооперативного решения во времени (в ходе его реализации), поэтому ключевым

является последний из рассмотренных аспектов проблемы принятия решений.

Кооперативные решения в широком смысле делятся на *статические* и *динамические*. В статическом случае решение принимается один раз, мгновенно реализуется, и участники сразу наблюдают результат его реализации. Несмотря на кажущуюся простоту такого подхода, классическая теория игр занимается в основном изучением именно таких моделей. Однако в реальной жизни мы имеем дело с управлением, а поэтому – с разворачивающимися во времени процессами (в нашем случае с конфликтными процессами).

Широко распространенная глобализация, быстрый экономический рост и беспрецедентный технологический прогресс превратили мир в тесно переплетенную сущность со стратегическим взаимодействием между нациями и людьми. Собственные интересы, стремящиеся к некооперативному поведению, в целом могут привести к крайне нежелательным результатам (таким как споры, войны, конфронтации, разрушения).

Поскольку реальные действия являются динамическими (длятся с течением времени), а не статичными (однократными), практически все возникающие реальные взаимодействия являются скорее динамическими, чем статическими. В динамичном мире некооперативное поведение, управляемое близорукими индивидуальными интересами, может стать источником многих катастрофических последствий в будущем.

Динамическое сотрудничество и динамическая оптимизация обеспечивают наилучшую возможность получения решений, которые являются *социально оптимальными* (что максимизирует совместную выгоду всех участников) и *индивидуально рациональными* (которые отвечают личным интересам) одновременно. В результате теория динамических кооперативных игр и методы динамической оптимизации становятся фундаментальными инструментами в фундаментальных и прикладных исследованиях.

Большое число существующих сегодня проблем имеют долговременный, динамический характер и срочно ждут совместных решений, например: борьба с эпидемическими заболеваниями, глобализация торговли, валютная война, международ-

ные торговые споры, глобальные финансовые кризисы и реформы, напряженность на Ближнем Востоке, национальная безопасность, глобальные проблемы загрязнения, Парижское соглашение по климату, кибер-безопасность, совместные исследования и разработки, совместные космические исследования, совместные медицинские и фармацевтические исследования.

В то же время для понимания концепции кооперативного решения начнем рассмотрение со статических игровых моделей [5, 6, 19].

Под *игрой* n лиц в *нормальной форме* понимается модель Γ вида:

$$\Gamma = (N, \{U^i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n),$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, U^i – множество стратегий, $u_i \in U^i$ – стратегия, $K_i(u_1, \dots, u_n)$ – функция выигрыша игрока $i \in N$.

Что же следует понимать под решением игры Γ ? Ответ на поставленный вопрос дают концепции (принципы) оптимальности, сформулированные в определениях. Во всех случаях понятно, что под решением следует понимать некоторый набор стратегий (u_1, \dots, u_n) всех игроков, удовлетворяющий требуемому свойству оптимальности. Наиболее распространенной концепцией оптимальности игры многих лиц является равновесие по Нэшу [19].

Определение 1. Набор стратегий $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ называется *равновесием по Нэшу*, если следующие неравенства выполняются для всех стратегий $u_i \in U^i$ и всех игроков $i \in N$:

$$K_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{i-1}, u_i, \bar{u}_{i+1}, \dots, \bar{u}_n) \geq K_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \dots, \bar{u}_n).$$

Равновесие по Нэшу (*NE-решение*) является кооперативным решением в широком смысле, поскольку выбор такого решения требует согласованного поведения игроков. Действительно, NE-решение представляет собой набор стратегий, удовлетворяющий указанной системе неравенств. Поэтому игроки по крайней мере должны договориться, что они будут придерживаться именно такого способа поведения. Последнее обстоятельство особенно важно, если в игре имеется несколько NE-решений.

В этом случае игроки должны договориться еще и о том, какое равновесие они будут реализовывать.

Определение 2. Набор стратегий $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ называется *оптимальным по Парето* [4, 5], если не существует другого набора стратегий (u_1, \dots, u_n) , для которого следующие неравенства выполняются для всех $i \in N$:

$$K_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \geq K_i(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_i, \dots, \tilde{u}_n),$$

и хотя бы для одного $j \in N$ выполняется

$$K_j(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) > K_j(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_i, \dots, \tilde{u}_n).$$

Оптимальное по Парето решение (*ПО-решение*) является кооперативным решением в широком смысле, поскольку принятие такого решения требует согласованного выбора стратегий всеми игроками и обладает свойством групповой рациональности при стратегическом поведении игроков. Концепция оптимальности по Парето справедлива как для игр с *трансферабельными*, так и для игр с *нетрансферабельными* выигрышами (такие выигрыши игроки не могут передавать друг другу).

Характерным представителем оптимального по Парето решения является *арбитражное решение Нэша*. Арбитражное решение Нэша [18] (u_1', \dots, u_n') является решением следующей оптимизационной задачи:

$$\max_{u_1, \dots, u_n} \prod_{i=1}^n [K_i(u_1, \dots, u_n) - K_i^0] = \prod_{i=1}^n [K_i(u_1', \dots, u_n') - K_i^0]$$

при ограничениях $K_i(u_1, \dots, u_n) \geq K_i^0, i \in N$.

Здесь (u_1^0, \dots, u_n^0) – некоторое заданное «эталонное решение», определяющее точку «статус-кво» $K^0 = (K_1^0, \dots, K_i^0, \dots, K_n^0), K_i^0 = K_i(u_1^0, \dots, u_n^0), i \in N$ [16, 18].

Обозначим через $\mathcal{K}(x_0, T - t_0)$ множество всех значений вектор-функции $K(u_1, \dots, u_n) = (K_1(u_1, \dots, u_n), \dots, K_n(u_1, \dots, u_n))$ для $u_i \in U^i, i \in N$. Множество \mathcal{K} будем называть множеством всевозможных оценок.

Другим представителем оптимального по Парето решения является *арбитражное решение Калаи – Смородинского* [16].

Арбитражное решение Калаи – Смородинского (u_1'', \dots, u_n'') является решением следующей оптимизационной задачи:

$$\lambda \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$K_i = K_i^0 + \lambda(\widehat{K}_i - K_i^0), \quad i \in N, \quad K = (K_1, \dots, K_n) \in \mathcal{K},$$

$$K_i = K_i(u_1, \dots, u_n), \quad u_i \in U_i, \quad i \in N,$$

$$0 \leq \lambda \leq 1,$$

где (u_1^0, \dots, u_n^0) – некоторое заданное «эталонное решение», определяемое точкой «статус-кво» $K^0 = (K_1^0, \dots, K_i^0, \dots, K_n^0)$, $K_i^0 = K_i(u_1^0, \dots, u_n^0)$, $i \in N$ и «идеальной» точкой

$$\widehat{K} = (\widehat{K}_1, \dots, \widehat{K}_i, \dots, \widehat{K}_n), \quad \widehat{K}_i = \max_{u_1, \dots, u_n} K_i(u_1, \dots, u_n), \quad i \in N.$$

Идеальную точку \widehat{K} обычно невозможно получить при каком-либо решении (иначе она и была бы оптимальным решением), то есть она не принадлежит множеству возможных оценок. Поэтому геометрически решение Калаи – Смородинского определяется точкой пересечения отрезка, соединяющего точку «статус-кво» и «идеальную» точку с границей множества возможных оценок. Заметим, что арбитражное решение Калаи – Смородинского (*KS-решение*) также является кооперативным решением в широком смысле как частный случай оптимального по Парето решения.

При заданной арбитражной схеме в задаче можно реализовать практически любое Парето-оптимальное решение за счет выбора точки «статус-кво». Таким образом, арбитражная схема регламентирует лишь механизм (правило), на основе которого предполагается выбрать оптимальное решение.

Все указанные выше принципы оптимальности являются *стратегическими* в том смысле, что построены на основе согласованного или совместного выбора стратегий игроками.

Рассмотрим теперь понятие кооперативного решения в узком смысле. Такая концепция кооперативного решения предполагает двойную кооперацию: по совместному выбору стратегий и дележу общего выигрыша от кооперации.

Напомним, что под *кооперативной игрой* в форме характеристической функции [6, 20] понимается модель Γ_ν вида $\Gamma_\nu = \langle N, \nu \rangle$, где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $\nu(S) \geq 0$, $S \subset N$, $\nu(\emptyset) = 0$ – *характеристическая функция*, обладающая свойством *супераддитивности*:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S \cap T = \emptyset.$$

Значение характеристической функции $v(S)$ часто интерпретируется как *максимальный гарантированный выигрыш коалиции* $S \subset N$. Из свойства супераддитивности характеристической функции следует, что $v(S) \geq v(S')$ для $S' \subset S \subseteq N$. Поэтому игрокам выгодно создавать *максимальную коалицию* N для получения максимально возможного суммарного выигрыша $v(N)$ в процессе игры [6].

Соглашение о том, как именно осуществлять кооперацию и разделять полученный в результате кооперативный выигрыш, и составляет *принцип оптимальности решения кооперативной игры* [6]. Решением кооперативной игры Γ_v является:

– соглашение о множестве кооперативных стратегий направленных на получение максимального выигрыша от кооперации;

– механизм распределения общего максимального выигрыша между игроками.

Множество всевозможных распределений максимального суммарного выигрыша называется *множеством дележей*. Обозначим через ξ_i выигрыш игрока $i \in N$ при кооперации, если общий выигрыш от кооперации равен $v(N)$.

Вектор (распределение суммарного выигрыша)

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

называется *дележом* в игре Γ_v , если выполняются условия:

- 1) $\xi_i \geq v(\{i\}), i \in N,$
- 2) $\sum_{i \in N} \xi_i = v(N).$

В этом определении условие 1 гарантирует *индивидуальную рациональность* дележа в том смысле, что каждый игрок получает в условиях дележа по меньшей мере такой же выигрыш (максимальный), который он может себе гарантировать в наихудшем случае, например, при противодействии всех остальных игроков. Условие 2 гарантирует *Парето-оптимальность* дележа, а поэтому и групповую рациональность.

Обозначим множество дележей в игре Γ_v через E_v . Под *кооперативным принципом оптимальности* W_v в игре Γ_v понима-

ется правило, по которому каждой игре Γ_v ставится в соответствие некоторое подмножество $W_v \subset E_v$ из множества дележей, то есть механизм распределения суммарного выигрыша от кооперации. Если принцип оптимальности W_v выбран, то дележ $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in W_v$ называется *оптимальным* в соответствии с данным принципом оптимальности W_v . Это и есть *определение кооперативного решения в узком смысле* [6, 25].

Приведем некоторые широко известные определения кооперативных решений.

Определение 3. Будем говорить, что дележ $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ принадлежит ядру игры Γ_v , если для каждой коалиции $S \subset N$ выполняется следующее условие: $\sum_{i \in N} \xi_i \geq v(S)$, $S \neq N$.

Множество всех дележей из ядра обозначается C_v . Смысл кооперативного решения из ядра понятен: если выбран в качестве оптимального дележ из ядра, то при таком дележе каждая коалиция получает не меньший выигрыш от кооперации, чем она может получить при наименее благоприятных условиях, действуя самостоятельно.

Определение 4. [21]. Вектор

$$\Phi^v(x_0, T - t_0) = (\Phi_1^v, \dots, \Phi_i^v, \dots, \Phi_n^v),$$

где

$$\Phi_i^v = \sum_{S \subset N (i \in S)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus i)], \quad i = 1, \dots, n,$$

называется вектором Шепли.

Можно показать, что вектор Шепли удовлетворяет условиям 1 и 2, то есть является дележом.

Существуют и другие принципы оптимальности, например, решение по Нейману – Моргенштерну, N-ядро и др. [6] Все перечисленные принципы оптимальности определяют кооперативные решения в узком смысле.

3. Проблема временной состоятельности кооперативных решений

В предыдущем разделе рассмотрены статические концепции кооперативного решения. Однако в реальных задачах

управление реализуется в течение некоторого временного промежутка. Покажем, что в динамике кооперативное решение должно обладать обязательным свойством, называемым *динамической устойчивостью*, или *временной состоятельностью* (*Time-Consistency*) [3, 13, 14, 17].

Под *свойством динамической устойчивости* (временной состоятельности) кооперативного решения понимают свойство сохранения оптимальности в каждой подзадаче с начальными условиями на оптимальной траектории, построенной в начальный момент времени [3, 25].

3.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть задана *управляемая система* дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^l, \\ x(t_0) &= x_0, \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

где вектор $x(t)$ описывает *состояние* системы, вектор $u(t)$ – *управление*, выбираемое в момент времени t .

Процесс происходит на конечном интервале времени $[t_0, T]$. *Целью управления* является перевод точки x_0 (состояния системы в начальный момент времени t_0) в некоторое состояние $x(T)$ (в момент окончания процесса T), при котором достигается минимум расстояния $\rho(x(T), M)$ до некоторой фиксированной точки $M \in \mathbb{R}^n$.

Таким образом, математически задачу можно сформулировать так: найти такое управление $\bar{u}(t), t \in [t_0, T]$, которое переводит в силу системы (1) точку x_0 в точку $\bar{x}(T)$, наиболее близко расположенную к точке M .

Построим множество $S(x_0, T - t_0)$, называемое *множеством достижимости* системы (1). Это множество тех точек $x(T)$, в которые может перейти система из x_0 в точности в момент времени T , в соответствии с допустимым правилом управления $u(t), t \in [t_0, T]$. Понятно, что при различных правилах управления (управляющих функциях, или «программных стратегиях») $u(t)$ точки $x(T)$ будут различны.

Обозначим задачу минимизации расстояния $\rho(x(T), M)$ через $\Gamma(x_0, T - t_0)$, подчеркивая её зависимость от начального состояния x_0 и времени процесса $T - t_0$.

Предположим для простоты, что точка M не принадлежит $C(x_0, T - t_0)$, то есть что $M \cap C(x_0, T - t_0) = \emptyset$. Это означает, что достижение точки M за время $T - t_0$ из состояния x_0 невозможно. *Принципом оптимальности* в данной задаче является минимизация расстояния между точкой $x(T)$ и точкой M .

Очевидно, что «оптимальное движение» («оптимальная траектория») должно переводить точку x_0 в точку M' ($x(t_0) = x_0$, $x(T) = M'$), наиболее близко расположенную в множестве $C(x_0, T - t_0)$ от точки M . Обозначим через $\bar{x}(t)$ траекторию, соединяющую x_0 с M' , реализованную при каком-то фиксированном (оптимальном) программном управлении $\bar{u}(t)$, то есть

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), x(t_0) = x_0, x(T) = M'.$$

Пусть процесс развивается вдоль оптимальной траектории $\bar{x}(t)$, как это показано на рис. 5.2.1. Рассмотрим некоторый промежуточный момент $\tau \in [t_0, T]$, и пусть мы пожелаем в этот момент проверить, будет ли точка M' оставаться ближайшей к M в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ с начальным условием $\bar{x}(\tau)$ на оптимальной траектории и продолжительностью $T - \tau$. Совершенно очевидно, что ответ – положительный, то есть можно утверждать, что продолжение движения вдоль $\bar{x}(t)$ при $t \geq \tau$ будет оптимальным движением в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ (см. рис. 5.2.1). Это и означает динамическую устойчивость или временную состоятельность оптимальной траектории $\bar{x}(t)$. Этот принцип был впервые сформулирован Р. Беллманом в 1957 г. [8] и лёг в основу теории *динамического программирования*. Он практически всегда выполняется в однокритериальных классических задачах оптимального управления.

Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место и более сильное условие (кстати, незамеченное Р. Беллманом). В задаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ может возникнуть и другое программное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [\tau, T]$, $\tilde{u}(t) \neq \bar{u}(t)$ и соответствующая траек-

тория $\tilde{x}(t)$, переводящая точку $\bar{x}(\tau)$ в M' и, следовательно, также оптимальное в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$.

Интересно заметить, что управление вида

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t \in [t_0, \tau), \\ \tilde{u}(t), & t \in [\tau, T]; \end{cases}$$

переводит точку x_0 в M' в задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$, то есть также является оптимальным в задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

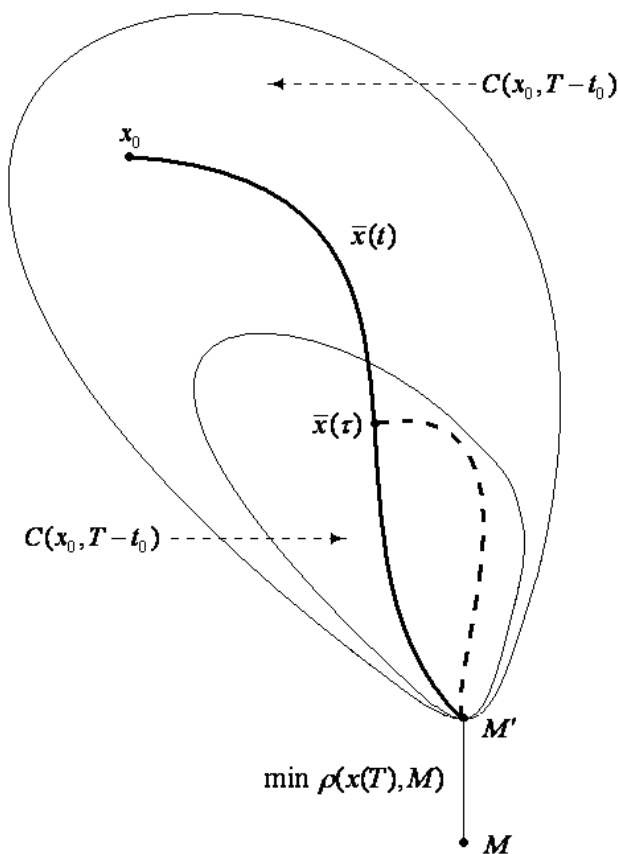


Рис. 5.2.1. Динамическая устойчивость оптимального управления

Таким образом, оказывается, что любое оптимальное продолжение в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ вместе с начальным оптимальным движением на отрезке $[t_0, \tau)$ в задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будет оптимальным в исходной задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$. Это свойство называется *сильной динамической устойчивостью управления*.

3.2. ВРЕМЕННАЯ СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть задана управляемая система дифференциальных уравнений (1) и целью управления является перевод точки x_0 в некоторое состояние $x(T)$, при котором минимизируется расстояние до точек M_1, \dots, M_k , то есть задача заключается в нахождении минимума *векторного критерия*

$$[\rho(x(T), M_1), \dots, \rho(x(T), M_1), \dots, \rho(x(T), M_k)],$$

где $M_l \in \mathbb{R}^n, l = 1, 2, \dots, k$.

Математически задачу можно сформулировать так: найти такое управление $\bar{u}(t)$, которое переводит в силу системы (1) точку x_0 в точку $\bar{x}(T)$, наиболее близко расположенную к системе точек M_1, \dots, M_k .

Поскольку данная задача является задачей многокритериального оптимального управления, то в качестве принципа оптимальности естественно рассматривать множество оптимальных по Парето решений.

Пусть, как и раньше, $C(x_0, T - t_0)$ - множество достижимости системы (1). Обозначим через $\Gamma(x_0, T - t_0)$ задачу *многокритериального оптимального управления*, подчеркивая в этом обозначении зависимость от начального состояния x_0 и времени процесса $T - t_0$.

Обозначим через \hat{M} выпуклую оболочку точек M_1, \dots, M_k .

Предположим для простоты, что $\hat{M} \cap C(x_0, T - t_0) = \emptyset$. Можно показать (при условии выпуклости множества достижимости (см. [4])), что множество оптимальных по Парето управлений в этой задаче состоит из программных управлений $\bar{u}(t)$, переводящих точку x_0 в некоторую точку M' , принадлежащую проекции множества \hat{M} на множество $C(x_0, T - t_0)$.

Обозначим через $\bar{x}(t)$ траекторию, соединяющую x_0 с некоторой точкой M' , принадлежащей проекции \widehat{M} на $C(x_0, T - t_0)$, и пусть $\bar{u}(t)$ – соответствующее программное управление.

Траекторию $\bar{x}(t)$ назовем *оптимальной траекторией*. Понятно, что данная задача может иметь бесконечное число оптимальных траекторий, поскольку проекция множества \widehat{M} на множество $C(x_0, T - t_0)$ в общем случае представляет собой замкнутое множество, содержащее более одной точки.

Рассмотрим некоторый промежуточный момент времени $\tau \in [t_0, T]$, и пусть мы пожелаем в этот момент проверить, будет ли точка M' концом оптимальной по Парето траектории в подзадаче подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ с начальным условием $\bar{x}(\tau)$ на оптимальной траектории и продолжительностью $T - \tau$.

Как и в задаче оптимального управления, ответ – положительный, то есть можно утверждать, что продолжение движения вдоль траектории $\bar{x}(t)$ при $t \geq \tau$ будет оптимальным движением в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$. Это и означает динамическую устойчивость или временную состоятельность оптимальной по Парето траектории $\bar{x}(t)$.

В то же время, как это видно из примера рис. 5.5.2, само Парето-оптимальное множество программных управлений и соответствующие им траектории в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ отличаются от Парето-оптимального множества в задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$, поскольку множество концов оптимальных по Парето траекторий в задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$ совпадает с дугой AB , а множество концов Парето-оптимальных траекторий в задаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ совпадает с дугой $A'B'$, которая является проекцией множества \widehat{M} на множество $C(\bar{x}(\tau), T - \tau)$.

В общем случае множества AB и $A'B'$ имеют одну общую точку M' . Можно видеть, что в подзадаче $\Gamma(\bar{x}(\tau), T - \tau)$ возникают новые оптимальные по Парето траектории, переводящие в силу системы (1) точку $\bar{x}(\tau)$ в одну из точек M'' дуги $A'B'$, несовпадающую с точкой M' .

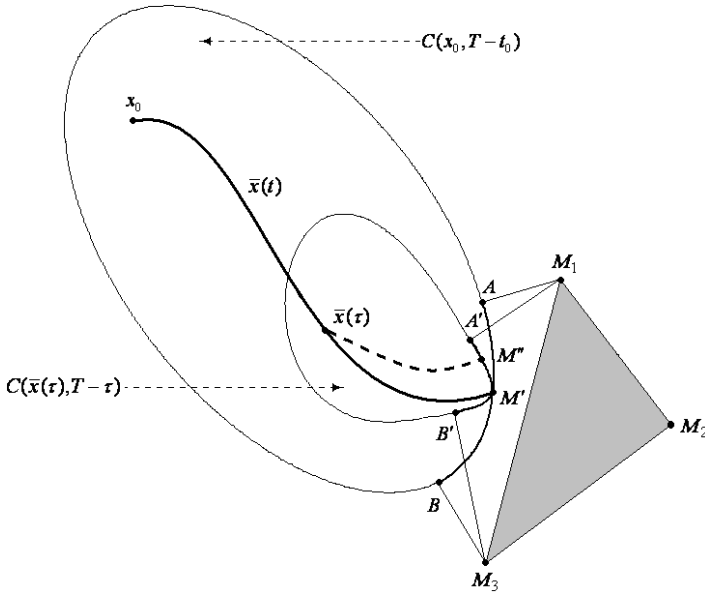


Рис. 5.5.2. Нарушение сильной динамической устойчивости Парето-оптимального решения

Рассмотрим следующее программное управление:

$$\bar{\bar{u}}(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t \in [t_0, \tau), \\ \tilde{u}(t), & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

где $\tilde{u}(t)$ – оптимальное по Парето программное управление, переводящее в силу системы (1) точку $\bar{x}(\tau)$ в точку M'' на отрезке времени $[\tau, T]$.

Поскольку точка M'' не принадлежит дуге AB , программное управление $\bar{\bar{u}}(t)$ не является Парето-оптимальным в первоначальной задаче $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в задачах многокритериального управления не всякое оптимальное продолжение движения в подзадачах с начальными условиями на оптимальной траектории первоначально поставленной задачи $\Gamma(x_0, T - t_0)$ является Парето-оптимальным в этой задаче. Это и означает нарушение *сильной динамической устойчивости* или

сильной состоятельности во времени Парето-оптимальных решений в задачах многокритериального управления.

При переходе от однокритериальных задач оптимального управления к многокритериальным задачам можно столкнуться с потерей сильной динамической устойчивости принципов оптимальности.

Само по себе это обстоятельство уже делает весьма проблематичным реализацию на практике принципа оптимальности в подобных задачах, поскольку в промежуточные моменты времени возникает возможность пересмотра первоначально выбранного решения с заменой его на оптимальное в таком же смысле решение, однако общее развитие процесса при этом оказывается неоптимальным в первоначальном смысле. Данное обстоятельство порождает естественную неуверенность у лица, принимающего управленческое решение, в выполнении первоначально задуманных планов и проектов.

3.3. ВРЕМЕННАЯ НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ КООПЕРАТИВНОГО РЕШЕНИЯ, ПОСТРОЕННОГО НА МЕХАНИЗМЕ ВЫБОРА КОНКРЕТНОГО ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ

Значительно более неприятной оказывается ситуация с выбором конкретного Парето-оптимального решения. Большинство принципов оптимальности (пусть даже в неигровых задачах), регламентирующие выбор конкретного Парето-оптимального решения из множества всех Парето-оптимальных решений, не являются динамически устойчивыми (состоятельными во времени).

Существует много подходов к выбору конкретного Парето-оптимального решения из множества всех Парето-оптимальных решений. К сожалению, наиболее нетривиальные и обоснованные из них являются динамически неустойчивыми (несостоятельными во времени). Покажем это на примере. Рассмотрим для этого выбор Парето-оптимального решения по принципу Калаи – Смородинского (KS-решением) – см. выше и [16].

В отличие от предыдущих двух случаев, будем считать, что правая часть системы (1) зависит от нескольких управляющих воздействий, то есть

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u_1(t), \dots, u_n(t)), \\ u_i &\in U_i, x(t_0) = x_0, x \in \mathbb{R}^m, t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

При этом каждое из управляющих воздействий u_i выбирается соответствующим «игроком». Для простоты будем предполагать, что каждый из «игроков» $i \in \{1, \dots, n\}$ заинтересован в некотором выигрыше, который имеет вид

$$K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T g^i(x(t)) dt + q^i(x(T)), \quad i \in N,$$

где $x(t)$ – решение системы (2), соответствующее управляющим воздействиям $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$, выбираемым игроками как функции текущих состояний и времени (*позиционные стратегии*), и начальному условию $x(t_0) = x_0$. В результате мы получаем некоторую *дифференциальную игру* (см. раздел 5.1 и [1, 7, 12, 24]), которую обозначим через $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Как и в статическом случае, обозначим через $\mathcal{K}(x_0, T - t_0)$ множество всех возможных значений вектора

$$[K_1(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n), \dots, K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n), \dots, K_n(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n)]$$

при различных допустимых управляющих воздействиях u_1, \dots, u_n (множество возможных оценок).

Пусть $\bar{K}(x_0, T - t_0) \subset \mathcal{K}(x_0, T - t_0)$ – Парето-оптимальное множество векторов-оценок в $\mathcal{K}(x_0, T - t_0)$. Как упоминалось ранее, при определении различных схем выбора конкретного Парето-оптимального решения важную роль играет точка «статус-кво». Во многих приложениях K_i^0 полагается равным значению максимального выигрыша, который игрок i может обеспечить себе в наихудшем случае, если все остальные игроки будут действовать против него (то есть вместо того, чтобы стремиться максимизировать свой выигрыш, направят все усилия на минимизацию выигрыша игрока i). Обозначим точку «статус-кво» следующим образом:

$$K^0(x_0, T - t_0) = [K_1^0(x_0, T - t_0), \dots, K_n^0(x_0, T - t_0)] \in \mathcal{K}(x_0, T - t_0).$$

Конечно, она зависит от начального условия x_0 и продолжительности игры $T - t_0$:

$$\hat{K}_i(x_0, T - t_0) = \max_{u_1, \dots, u_n} K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n).$$

Точка $\widehat{K}(x_0, T - t_0) = [\widehat{K}_1(x_0, T - t_0), \dots, \widehat{K}_i(x_0, T - t_0), \dots, \widehat{K}_n(x_0, T - t_0)]$, как и ранее, называется «идеальной» точкой и имеет смысл максимальных значений выигрышей игроков

Проведем «геометрический» анализ проблемы временной состоятельности KS -решения. Для нахождения KS -решения проведем отрезок L , соединяющий точки $K^0(x_0, T - t_0)$ и $\widehat{K}(x_0, T - t_0)$. Поскольку $K^0(x_0, T - t_0) \in \mathcal{K}(x_0, T - t_0)$, а также $\widehat{K}(x_0, T - t_0) \notin \mathcal{K}(x_0, T - t_0)$, то существует точка M пересечения границы множества $\mathcal{K}(x_0, T - t_0)$ и отрезка L . Если такая точка единственна, то она называется KS -решением. Если точка M не единственна, то в качестве KS -решения можно взять точку пересечения отрезка L с множеством $\mathcal{K}(x_0, T - t_0)$, наиболее удаленную от $K^0(x_0, T - t_0)$. Если множество $\mathcal{K}(x_0, T - t_0)$ выпукло, то KS -решение всегда принадлежит множеству Парето-оптимальных точек. Однако легко видеть, что KS -решение не является динамически устойчивым (состоятельным во времени).

Проиллюстрируем это обстоятельство на числовом примере. Пусть система (2) имеет вид

$$\dot{z} = u + v, \quad |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1, \quad z \in \mathbb{R}^2; \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2,$$

$$z_0 = (6, 5; 5), \quad t \in [0; 2], \quad z = (x, y),$$

$$K_1(z_0, 2; u_1, u_2) = -x(2), \quad K_2(z_0, 2; u_1, u_2) = -|y(2)|.$$

Покажем временную несостоятельность решения Калаи – Смородинского. Здесь точка «статус-кво» в задаче $\Gamma(z_0, 2)$ равна $K^0(z_0, 2) = (6, 5; 5)$ и соответствует начальному состоянию $z_0 = (6, 5; 5)$. Идеальная точка этой задачи равна $\widehat{K}(z_0, 2) = (-2, 0)$ и соответствует точке $\hat{z}(z_0, 2) = (2, 0)$, поскольку $\max K_1 = -2$, $\max K_2 = 0$. Множество достижимости $C^2(6, 3)$ есть круг с центром в точке $(6, 5; 5)$ и радиусом 4. Оптимальная траектория соответствует движению по прямой от точки $z_0 = (6, 5; 5)$ по направлению к точке $\hat{z}(z_0, 2) = (2, 0)$ до пересечения с большей окружностью $C^2(6, 5; 5)$. Эта точка пересечения и определяет $KS(z_0, 2)$ -решение в задаче $\Gamma(z_0, 2)$ (см. рис. 5.2.3).

Видно, что при движении вдоль оптимальной траектории $\bar{z}(t)$, соединяющей точку z_0 с KS -решением задачи $\Gamma(z_0, 2)$,

в подзадаче $\Gamma(\bar{z}(1), 1)$ возникает новое KS -решение отличное от KS -решения основной задачи, то есть $KS(z_0, 2) \neq KS(\bar{z}(1), 1)$, что и означает временную несостоятельность (динамическую неустойчивость) KS -решения.

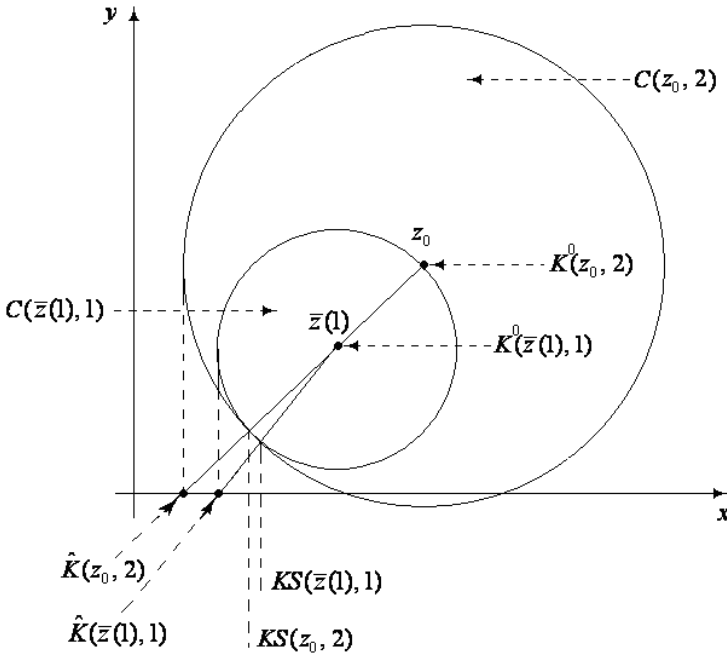


Рис. 5.2.3. Пример временной несостоятельности KS -решения

4. Регуляризация кооперативного принципа оптимальности

Предыдущие рассмотрения показывают, что кооперативные решения в широком смысле могут быть не состоятельными во времени, а поэтому их реализация связана с серьезными проблемами и, в конечном счете, с недостижением результатов кооперации в том смысле, как это предполагалось при принятии кооперативного решения. Динамически устойчивыми являются лишь решения задачи оптимального управления и равновесие

по Нэшу [9, 10, 11, 15, 22, 23]. Имеется ли выход из создавшегося положения? К счастью, можно дать положительный ответ на поставленный вопрос. Решение проблемы возможно в классе кооперативных решений в узком смысле, то есть когда задача формализуется как кооперативная игра.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООПЕРАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

Рассмотрим общую дифференциальную игру n лиц с уравнениями движения:

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[t, x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Игра происходит на промежутке $[t_0, T]$. Выигрыш игрока i определяется по формуле:

$$(4) \quad \int_{t_0}^T g^i[s, x(s), u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)] ds + q^i(x(T)),$$

$$g^i \geq 0, q^i \geq 0,$$

где $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^m$ – состояние, $u_i \in U_i$ – управляющее воздействие игрока $i \in N$. В рассматриваемом случае будем считать, что выигрыши игроков трансферабельные.

Предположим, что игроки перед началом игры приняли решение максимизировать суммарный выигрыш. Пусть $\Gamma_c(x_0, T - t_0)$ – кооперативная игра, построенная на структуре игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$, в которой игроки действуют в соответствии с некоторым заранее принятым принципом оптимальности. Соглашение о том, как именно осуществлять кооперацию и разделить полученный в результате кооперативный выигрыш, и составляет принцип оптимальности решения кооперативной схемы.

Принцип оптимальности решения должен оставаться действенным на всем периоде кооперации. Кроме того, принцип групповой рациональности требует, чтобы игроки выбирали кооперативные стратегии (управления) из Парето-оптимального множества. В дополнение к этому принцип распределения полученного суммарного выигрыша должен быть индивидуально-рациональным в том смысле, что в результате кооперации ни

один из игроков не получил бы меньше, чем без кооперации.

Для выполнения условия групповой рациональности в случае трансферабельных выигрышей игроки стремятся максимизировать суммарный выигрыш

$$(5) \quad \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{t_0}^T g^j[s, x(s), u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)] ds + q^j(x(T)) \right\}$$

при уравнениях динамики (3).

Для нахождения соответствующих максимизирующих управлений $u^*(s) = [u_1^*(s), u_2^*(s), \dots, u_n^*(s)]$ можно использовать принцип максимума Понтрягина или уравнение Беллмана. Подставляя полученные оптимальные управления в (3), получаем оптимальную траекторию $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$, которая определяется соотношением

$$(6) \quad x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[s, x^*(s), u^*(s)] ds, t \in [t_0, T].$$

Для удобства обозначений в дальнейшем изложении будем использовать как эквивалентные символы $x^*(t)$ и x_t^* .

Обозначим выражение

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{t_0}^T g^j[s, x^*(s), u^*(s)] ds + q^j(x^*(T)) \right\}$$

через $v(N; x_0, T - t_0)$.

В дифференциальной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ можно определить характеристическую функцию $V(S; x_0, T - t_0)$ для $S \subset N$ так же, как и в статической (одновременной) игре. Она интерпретируется как максимальный выигрыш, который коалиция $S \subset N$ может гарантировать себе в игре. При такой интерпретации определим $V(S; x_0, T - t_0)$ как нижнее значение (maxmin) антагонистической игры между игроками S и $N \setminus S$; при этом выигрыш коалиции S (первый игрок) будем считать равным сумме индивидуальных выигрышей всех игроков из S . В теории кооперативных дифференциальных игр используются и другие определения характеристической функции. В частности, наилучший ответ коалиции S (максимальный выигрыш коалиции S), который она себе может обеспечить, если игроки, не входящие в S , используют стратегии из некоторого фиксированного равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре. Возможны и другие подходы.

Будем использовать обозначение $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$ для определения дифференциальной игры в форме характеристической функции $v(S; x_0, T - t_0)$, $S \subseteq N$.

Обозначим через

$$\xi(x_0, T - t_0) = [\xi_1(x_0, T - t_0), \xi_2(x_0, T - t_0), \dots, \xi_n(x_0, T - t_0)]$$

произвольный дележ, $C_v(x_0, T - t_0)$ – ядро, $\Phi^v(x_0, T - t_0)$ – вектор Шепли [21] в игре $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$.

4.2. ДИНАМИКА ДЕЛЕЖЕЙ В КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ

В динамических и дифференциальных играх дележи, входящие в решение, естественным образом находятся в поле зрения игроков при их движении вдоль оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$. В этом подразделе основное внимание обращается на динамику распределения дележа, обусловленного выбранным принципом оптимальности.

Итак, пусть в игре $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$ выбран некоторый принцип оптимальности – решение $W_v(x_0, T - t_0)$. Решение игры строится в начальном состоянии $x(t_0) = x_0$ на основе данного принципа оптимальности и представляет собой некоторое подмножество множества дележей $W_v(x_0, T - t_0) \subseteq E_v(x_0, T - t_0)$, а также траекторию $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$, максимизирующую суммарный выигрыш

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{t_0}^T g^j[s, x^*(s), u^*(s)] ds + q^j(x^*(T)) \right\}.$$

Определение 5. Любая траектория $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$, являющаяся решением системы (3) и такая, что

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{t_0}^T g^j[s, x^*(s), u^*(s)] ds + q^j(x^*(T)) \right\} = v(N; x_0, T - t_0)$$

называется *условно-оптимальной траекторией* в игре $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$.

Из определения 5 следует, что вдоль условно-оптимальной траектории игроки получают максимальный суммарный выигрыш. Рассмотрим поведение множества $W_v(x_0, T - t_0)$ вдоль условно-оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$. Для каждого текущего состояния $x^*(t) = x_t^*$ определяем текущую подыгру $\Gamma_v(x_t^*, T - t)$

с характеристической функцией $v(S; x_t^*, T-t)$ и множеством дележей $E_v(x_t^*, T-t)$.

Рассмотрим семейство текущих игр $\{\Gamma_v(x_t^*, T-t), t_0 \leq t \leq T\}$ и их решения $W_v(x_t^*, T-t) \subset E_v(x_t^*, T-t)$, порожденные тем же принципом оптимальности, что и решения $W_v(x_t^*, T-t_0)$.

Понятно, что множество $W_v(x_T^*, 0)$ есть решение текущей игры $\Gamma_v(x_T^*, 0)$ в момент T и состоит из единственного дележа

$$\begin{aligned} q(x^*(T)) &= [q^1(x^*(T)), q^2(x^*(T)), \dots, q^n(x^*(T))] = \\ &= [q^1(x_T^*), q^2(x_T^*), \dots, q^n(x_T^*)]. \end{aligned}$$

4.3. ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ (СОСТОЯТЕЛЬНОЕ ВО ВРЕМЕНИ) КООПЕРАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ

Определение оптимального поведения игроков является основным вопросом в теории кооперативных игр. Поведение игроков, удовлетворяющее некоторому принципу оптимальности, и составляет решение игры. Для динамических игр требуется выполнение ещё одного дополнительного условия (динамической устойчивости или состоятельности во времени): выбранный принцип оптимальности должен оставаться оптимальным в каждой подыгре с начальными условиями на оптимальной траектории, построенной в начальный момент. К сожалению, все основные кооперативные принципы оптимальности в узком смысле являются динамически неустойчивыми (несостоятельными во времени).

Пусть $W_v(x_t^*, T-t_0) \neq \emptyset$, $t_0 \leq t \leq T$, вдоль условно-оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$. Предположим, что в момент времени t_0 в состоянии x_0 игроки согласились на дележ $\xi(x_0, T-t_0) = [\xi_1(x_0, T-t_0), \xi_2(x_0, T-t_0), \dots, \xi_n(x_0, T-t_0)] \in W_v(x_0, T-t_0)$. Это означает, что игроки согласились на такой дележ суммарного выигрыша, при котором доля игрока i на отрезке времени $[t_0, T]$ в точности равна $\xi_i(x_0, T-t_0)$. Если, в соответствии с дележом $\xi(x_0, T-t_0)$, игрок i предполагает получить выигрыш, равный $\omega[\xi_i(x_0, T-t_0); x^*(t), t-t_0]$ на временном интервале $[t_0, t]$, то на оставшемся интервале $[t, T]$ его выигрыш должен быть равен:

$$(7) \quad \eta_i[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), T - t] = \xi_i(x_0, T - t_0) - \omega_i[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0].$$

Для того чтобы первоначальное соглашение о дележе (а именно, о дележе $\xi(x_0, T - t_0)$) сохранялось в силе в момент t , существенно, чтобы вектор

$$(8) \quad \eta[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), T - t] \in W_v(x_t^*, T - t),$$

то есть $\eta[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), T - t]$ должен быть действительно решением текущей игры $\Gamma_v(x_t^*, T - t)$. Если указанное условие выполняется в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ вдоль оптимальной траектории $\{x_s^*\}_{s=t_0}^T$, тогда дележ $\xi(x_0, T - t_0)$ динамически устойчив.

Динамическая устойчивость или состоятельность во времени решения $\xi(x_0, T - t_0)$ гарантирует, что продолжение решения в подыграх, начинающихся на оптимальной траектории, должно оставаться оптимальным. Кроме того, групповая и индивидуальная рациональность должна выполняться на всем временном интервале.

К сожалению, все основные кооперативные принципы оптимальности в узком смысле являются динамически неустойчивыми (несостоятельными во времени). Однако выход из положения есть: необходимо специальным образом определить механизм выплат, который бы обеспечил устойчивую реализацию таких дележей.

4.4. ПРОЦЕДУРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕЛЕЖА

Процедура распределения дележа, впервые предложенная в [3], построена таким образом, чтобы динамическая устойчивость дележей могла быть реализована для конкретного дележа из кооперативного решения. Представим выигрыш игрока i , получаемый им на временном интервале $[t_0, t]$, в виде

$$(9) \quad \omega_i[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), t - t_0] = \int_{t_0}^t B_i(s) ds,$$

где $\sum_{j=1}^N B_j(s) = \sum_{j=1}^N g^j[s, x^*(s), u^*(s)]$ при $t_0 \leq s \leq t \leq T$ и $\eta_i[\xi(x_0, T - t_0); x^*(t), T - t] + \omega_i = \xi_i(x_0, T - t_0)$.

Отсюда получаем

$$(10) \quad B_i(t) = -\frac{d\eta_i}{dt} \text{ или } \frac{d\omega_i}{dt} = B_i(t),$$

где $\eta \in W_i(x_i^*, T-t)$.

Величина $B_i(t)$ может быть проинтерпретирована как мгновенный выигрыш игрока i в момент t . Очевидно, что вектор $B(t) = [B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t)]$ предписывает распределение суммарного выигрыша между членами коалиции N . Выбирая $B(t)$, $t \in [t_0, T]$, игроки могут гарантировать желаемый исход, а именно, в каждый момент $t \in [t_0, T]$ у них не будет оснований против реализации первоначального дележа $\xi(x_0, T-t_0)$ – см. рис. 5.2.4, то есть дележ $\xi(x_0, T-t_0)$ динамически устойчив.

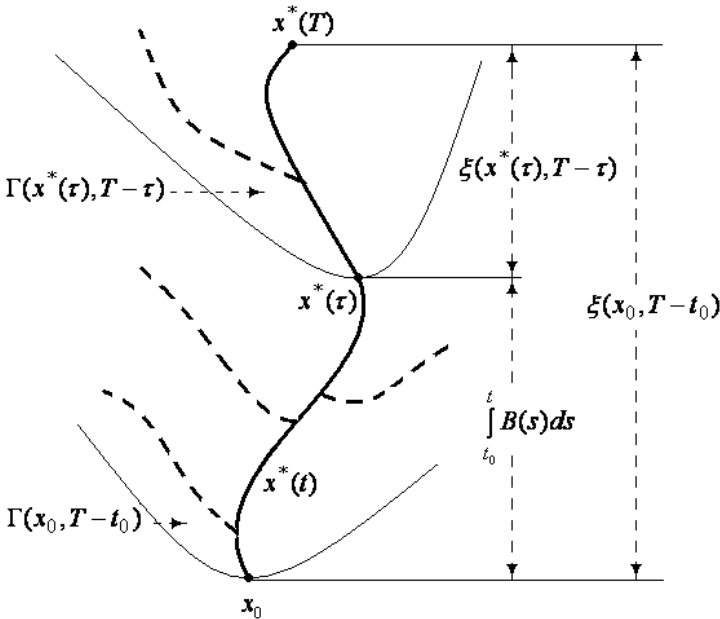


Рис. 5.2.4. Динамически устойчивое кооперативное решение

Кооперативная дифференциальная игра $\Gamma_i(x_0, T-t_0)$ имеет динамически устойчивое решение $W_i(x_0, T-t_0)$, если все его дележи $\xi(x_0, T-t_0) \in W_i(x_0, T-t_0)$ динамически устойчивы.

Условно-оптимальная траектория, вдоль которой существует динамически устойчивое решение игры $\Gamma_v(x_0, T - t_0)$, называется *оптимальной траекторией*.

В [3, 25] при достаточно общих предположениях доказано, что процедура выбора $V(t)$, $t \in [t_0, T]$ (*процедура распределения дележа*), приводящая к динамически устойчивому кооперативному решению, существует и реализуема. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть существует дифференцируемый селектор $\eta \in W_v(x_t^*, T - t)$, $t \in [t_0, T]$, тогда процедура распределения дележа $V(t)$, приводящая к динамически устойчивому кооперативному решению, всегда может быть построена по формуле (10).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем разделе описаны долгосрочные кооперативные решения в широком (основанные на согласовании интересов) и узком (требующие стратегической кооперации по максимизации суммарного выигрыша и механизма распределения этого выигрыша) смысле.

Показано, что основные кооперативные принципы оптимальности не обладают свойством динамической устойчивости (временной состоятельности), требующим сохранения свойства оптимальности на промежутке его реализации вдоль оптимальной траектории. Рассмотрен метод регуляризации, основанный на введении нового управления на оптимальной траектории. Результатом применения этого метода в конкретной задаче динамической кооперации является построение управления в виде функции специальных выплат, реализуемого на оптимальной траектории. Таким образом получают двухэтапную задачу: принятия кооперативного решения в рамках выбранного принципа оптимальности и построения управления для данного кооперативного решения на основе применения метода регуляризации. Кооперативное решение, полученное в результате решения этой двухэтапной задачи, будет обладать свойством динамической устойчивости.

Описанный метод регуляризации задач кооперативного управления в условиях конфликта апробирован на многочисленных задачах прикладного характера. В частности, в задачах [25]: оптимального использования рыбных ресурсов несколькими конфликтующими сторонами (странами) – главы 2–3, совместной добычи ограниченного ресурса как в детерминированной постановке так и с учетом случайных факторов – главы 5–10, инвестирования несколькими участниками общественно значимых проектов – главы 11–12, кооперации в вопросах охраны окружающей среды – глава 13, кооперации при выборе ресурсосберегающих технологий – глава 14, создания совместных предприятий – глава 15.

Литература

1. КРАСОВСКИЙ Н.Н. *Управление динамической системой*. – М.: Физматлит, 1985. – 518 с.
2. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Физматлит, 2012. – 604 с.
3. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами // Вестник Ленинградского университета*. – 1979. – №1. – С. 52–59.
4. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗАХАРОВ В.В. *Математические модели в экологии*. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1997. – 250 с.
5. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр*. – М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.
6. ПЕЧЕРСКИЙ С.Л., ЯНОВСКАЯ Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы*. – СПб.: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2004. – 460 с.
7. ПОНТРЯГИН Л.С. *К теории дифференциальных игр // УМН*. – 1966. – Том 21, №46. – С. 219–274.
8. BELLMAN R. *Dynamic Programming*. – Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957. – 220 p. (Рус. перевод: Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Иностранная лит-ра, 1960. – 401 с.)

9. CASE J.H. *Equilibrium Points of n-Person Differential Games*. – Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI, Department of Industrial Engineering, Tech. Report No. 1967-1.
10. HAURIE A. *A Note on Nonzero-Sum Differential Games with Bargaining Solutions* // J. of Optimization Theory and Application. – 1976. – Vol. 18. – P. 31–39.
11. HAURIE, A., KRAWCZYK J.B., ROCHE M. *Monitoring Cooperative Equilibria in a Stochastic Differential Game* // J. of Optimization Theory and Applications. – 1976. – Vol. 81. – P. 73–95.
12. ISAACS R. *Differential Games*. – Wiley, New York, 1965. (Рус. перевод: Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. – М.: Мир, 1967. – 480 с.)
13. JORGENSEN S., ZACCOUR G. *Time Consistent Side Payment in a Dynamic Game in Downstream Pollution* // J. of Economic Dynamics and Control. – 2001. – Vol. 25. – P. 1973–1987.
14. JORGENSEN S., ZACCOUR G. *Time Consistency in Cooperative Differential Games* // In: *Decision and control in management sciences: essays in honor of Alan Haurie / G. Zaccour* (ed). – London: Kluwer Science Publisher, 2002. – P. 349–366.
15. KAITALA V. *Equilibria in a Stochastic Resource Management Game under Imperfect Information* // European J. of Operational Research. – 1993. – Vol. 71. – P. 439–453.
16. KALAI E., SMORODINSKIY M. *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem* // *Econometrica*. – 1975. – Vol. 43. – P. 513–518.
17. KYDLAND F.E., PRESCOTT E.C. *Rules Rather than Discretion: the Inconsistency of Optimal Plans* // J. of Political Economy. – 1977. – Vol. 85. – P. 473–490
18. NASH J.F. *The Bargaining Problem* // *Econometrica*. – 1950. – Vol. 18, No. 2. – P. 155–162.
19. NASH J.F. *Non-Cooperative Games* // *Ann. Math.* – 1951. – Vol. 54, No. 2. – P. 286–295.
20. NEUMANN J., MORGENSTERN O. *Theory of Games and Economic Behavior*. – Princeton: Princeton University Press, 1944. – 625 p. (Рус. перевод: Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. – М.: Наука, 1970. – 708 с.)

21. SHAPLEY L.S. *A Value for n-Person Games* // In: Contributions to the Theory of Games. – Princeton: Princeton University Press II, 1953. – P. 307–317.
22. STARR A.W., HO Y.C. *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games* // J. of Optimization Theory and Applications. – 1969. – Vol. 3. – P. 207–219.
23. STARR A.W., HO Y.C. *Nonzero-Sum Differential Games* // J. of Optimization Theory and Applications. – 1969. – Vol. 3. – P. 184–206.
24. TOLWINSKI B., HAURIE A., LEITMANN G. *Cooperative Equilibria in Differential Games* // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1986. – Vol. 119. – P. 182–202.
25. YEUNG D.W.K., PETROSYAN L.A. *Subgame Consistent Cooperation. A Comprehensive Treatise*. – Springer, 2016. – 520 p.

5.3. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ И РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ

Коргин Н.А.¹, Новиков Д.А.²

1. Введение

Настоящий раздел посвящен рассмотрению задач управления, базирующихся на моделях иерархических и рефлексивных игр. Сначала вводится модель игры в нормальной форме и ряд равновесий в ней (подраздел 2). Затем рассматриваются иерархические игры (подраздел 3), использование теории игр при анализе и синтезе организационных механизмов управления (подраздел 4), связь между играми и оргструктурами (подраздел 5) и рефлексивные игры (подраздел 6).

2. Игры в нормальной форме

Рассмотрим теоретико-игровую модель *некооперативного взаимодействия* между n агентами, предполагая, что они принимают решения однократно, одновременно и независимо: не имея возможности договариваться о выбираемых действиях, перераспределять получаемую полезность (выигрыш) и т.д.

Каждый агент осуществляет выбор *действия* x_i , принадлежащего *допустимому множеству* X_i , $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – *множеству агентов*. Выбор действий агентами осуществляется однократно, одновременно и независимо.

Выигрыш i -го агента зависит от его собственного действия $x_i \in X_i$, от *обстановки игры* – вектора действий

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$$

оппонентов (агентов из множества $N \setminus \{i\}$), от внешнего параметра – *состояния природы*¹ $\theta \in \Omega$, от значения *управления* $u \in U$

¹ Николай Андреевич Коргин, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; д.т.н., доцент (nkorgin@ipu.ru).

² Дмитрий Александрович Новиков, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; чл.-корр. РАН (novikov@ipu.ru).

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

и описывается действительнзначной функцией выигрыша $f_i = f_i(\theta, x, u)$, где $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X' = \prod_{j \in N} X_j$ – век-

тор действий всех агентов, который называется *ситуацией игры*.

При фиксированных значениях управляющего воздействия и состояния природы θ совокупность $\Gamma_0 = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N})$ множества агентов, множеств их допустимых действий и целевых функций называется *игрой в нормальной форме*. *Решением игры (равновесием)* $E(u, \theta) \subseteq X'$ называется множество устойчивых в том или ином (и оговариваемом в каждом конкретном случае – см. ниже) смысле векторов действий агентов.

Каждый агент будет стремиться выбрать наилучшие для него (с точки зрения значения его целевой функции) действия при заданной обстановке. *Обстановкой* для него будет совокупность: управления $u \in U$, состояния природы $\theta \in \Omega$ и *обстановки игры* x_{-i} .

Следовательно, принцип принятия i -м агентом решения о выбираемом действии (при фиксированной обстановке) можно записать следующим образом (BR обозначает *наилучший ответ – Best Response*)² – *рациональным* является выбор действий из множества (ср. выражение (1) с гипотезой рационального поведения во введении к настоящей главе):

$$(1) \quad BR_i(\theta, x_{-i}, u) = \text{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}, u), \quad i \in N.$$

Задача управления. Обозначим через $F(x, u)$ целевую функцию управляющего субъекта (*Центра*), являющуюся *критерием эффективности управления*. Предположим, что состояние природы $\theta \in \Omega$ известно Центру и агентам.

Задача Центра заключается в выборе допустимого управляющего воздействия, максимизирующего критерий эффективности управления при условии, что при заданном управлении агенты выбирают одно из равновесий их игры:

¹ Состояние природы может быть, в том числе, вектором, компоненты которого отражают, например, индивидуальные характеристики (так называемые типы) агентов.

² При использовании максимумов и минимумов предполагается, что они достигаются.

$$(2) \quad \min_{x \in E(u, \theta)} F(x, u) \rightarrow \max_{u \in U} .$$

Взятие в выражении (2) минимума по множеству равновесий соответствует использованию Центром *принципа максимального гарантированного результата*, в соответствии с которым Центр рассчитывает на то, что агенты выберут наихудшее для него равновесие.

В общем случае теоретико-игровая модель управляемой системы (УС), как было указано выше, определяется совокупностью следующих компонент:

- *состава УС* (агентов, входящих в УС, то есть ее элементов);
- *структуры УС*, определяющий порядок взаимодействия агентов;
- *множеств допустимых действий* агентов;
- *предпочтений* агентов;
- *информированности* – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники УС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях.

Следовательно, взяв за основание системы классификаций управлений предмет управления – изменяемый в процессе и результате управления компонент УС, получаем, что по этому основанию можно выделить [8]:

- *управление составом*;
- *управление структурой*;
- *институциональное управление* – управление множеством допустимых действий;
- *мотивационное управление* (управление предпочтениями и интересами – изменение целевых функций);
- *информационное управление* (управление информацией, которой обладают участники УС на момент принятия решений).

Приводимые ниже примеры иллюстрируют ряд перечисленных видов управления.

Рассмотрим возможные принципы принятия решений агентами, каждый из которых порождает соответствующую концепцию равновесия, то есть определяет, в каком смысле устойчивым должен быть прогнозируемый исход игры (в случаях когда

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

состояние природы и управление фиксированы, будем опускать зависимость от них целевых функций и равновесий).

Равновесие в доминантных стратегиях. Если для некоторого агента множество его наилучших ответов не зависит от обстановки, то оно составляет множество его доминантных стратегий (совокупность доминантных стратегий всех агентов называется *равновесием в доминантных стратегиях* – РДС). Если у каждого из агентов существует доминантная стратегия, то агенты могут принимать решения независимо, то есть выбирать действия, не имея никакой информации и не делая никаких предположений об обстановке. К сожалению, РДС существует далеко не во всех играх.

Гарантирующее равновесие. *Гарантирующее (максиминное) равновесие* существует почти во всех играх:

$$x_i^{\Gamma}(u) \in \text{Arg max}_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}, u), i \in N.$$

Содержательно в случае гарантирующего равновесия предполагается, что каждый агент рассчитывает на реализацию наихудшей для себя обстановки игры и состояния природы.

Точка Парето. Обозначим $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Ситуация игры $x^P \in X'$ называется *эффективной по Парето*, если для любой ситуации $x \in X'$, в которой $f(x) \neq f(x^P)$, найдется игрок $i \in N$ такой, что $f_i(x) < f_i(x^P)$.

Эффективную по Парето ситуацию игры называют также *точкой Парето*. Если точка Парето характеризует ситуацию, которую нельзя улучшить для всех игроков одновременно, то равновесие Нэша – это такая ситуация, от которой никому из игроков не выгодно отклоняться поодиночке.

Равновесие Нэша. Определим многозначное отображение $BR(\theta, x, u) = (BR_1(\theta, x_{-1}, u); BR_2(\theta, x_{-2}, u), \dots, BR_n(\theta, x_{-n}, u))$.

Равновесием Нэша (названным так в честь Джона Нэша [18]) при состоянии природы θ и управлении $u \in U$ (точнее, *параметрическим равновесием Нэша*) называется точка $x^*(\theta, u) \in X'$, удовлетворяющая следующему условию (см. также раздел 5.2):

$$x^*(\theta, u) \in BR(\theta, x^*(\theta, u), u).$$

Последнее условие можно также записать в виде:

$$\forall i \in N, \forall y_i \in X_i \quad f_i(\theta, x^*(\theta, u), u) \geq f_i(\theta, y_i, x_{-i}^*(\theta, u), u).$$

Множество $E_N(\theta, u)$ равновесий Нэша можно описать следующим образом:

$$E_N(\theta, u) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X' \mid x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}, u), i \in N\}.$$

Для реализации равновесия Нэша достаточно, чтобы рациональность агентов и все параметры игры, а также значения управления и состояния природы были *общим знанием*, то есть каждый из агентов рационален, знает множество участников игры, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также значения управления и состояния природы. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает, и так далее до бесконечности. Отказ от предположения об общем знании превращает игру в нормальной форме в рефлексивную игру (см. ниже и [9]).

Субъективное равновесие. Рассмотренные виды равновесий являются частными случаями *субъективного равновесия*, которое определяется как вектор действий агентов, каждая компонента которого является наилучшим ответом соответствующего агента на ту обстановку, которая с его субъективной точки зрения может реализоваться. Рассмотрим возможные случаи.

Предположим, что i -й агент рассчитывает на реализацию обстановки игры \hat{x}_{-i}^B («В» обозначает *Beliefs*; иногда используются термины «предположение», «догадка» – *Conjecture*) и состояния природы $\hat{\theta}_i$, тогда он выберет $x_i^B(u) \in BR_i(\hat{\theta}_i, \hat{x}_{-i}^B, u)$, $i \in N$. Вектор $x^B(u)$ является точечным субъективным равновесием.

Отметим, что при таком определении «равновесия» не требуется *обоснованности* предположений агентов о действиях оппонентов, то есть может оказаться, что $\exists i \in N: \hat{x}_{-i}^B \neq x_{-i}^B$. Обоснованное субъективное равновесие, то есть такое, что $\hat{x}_{-i}^B = x_{-i}^B$, $i \in N$, является равновесием Нэша (для этого, в частности, достаточно, чтобы все параметры игры были общим знанием, и чтобы каждый агент при построении \hat{x}_{-i}^B моделировал рациональное поведение оппонентов). В частном случае,

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

если наилучший ответ каждого агента не зависит от предположений об обстановке, субъективное равновесие является равновесием в доминантных стратегиях.

В более общем случае в качестве наилучшего ответа i -го агента можно рассматривать распределение вероятностей $p_i(x_i)$, где $p_i(\cdot) \in \Delta(X_i)$ – множеству всевозможных распределений на X_i , которое максимизирует ожидаемый выигрыш агента с учетом его представлений о распределении вероятностей $\mu_i(x_{-i}) \in \Delta(X_{-i})$ действий, выбираемых другими агентами, и распределении вероятностей $q_i(\theta) \in \Delta(\Omega)$ состояния природы (получим *Байесов принцип принятия решений*) [9, 17]:

$$p_i(\mu_i(\cdot), q_i(\cdot), \cdot) \in \text{Arg} \max_{p_i \in \Delta(X_i)} \int_{X', \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}) p_i(x_i) q_i(\theta) \mu_i(x_{-i}) d\theta dx.$$

Таким образом, для реализации субъективного равновесия требуется минимальная информированность агентов: каждый из них должен знать свою целевую функцию $f_i(\cdot)$ и допустимые множества Ω и X' . Однако при такой информированности предположения агентов о состоянии природы и о поведении оппонентов могут быть *несогласованными*. Для достижения согласованности, то есть для того, чтобы предположения оправдывались, необходимы дополнительные предположения о взаимной информированности агентов. Наиболее сильным является предположение об общем знании, которое превращает субъективное точечное равновесие в равновесие Нэша, а совокупность Байесовых принципов принятия решений – в равновесие Байеса – Нэша.

Равновесие Байеса – Нэша. Если в игре имеется неполная информация, то *Байесова игра* (введенная в статье Дж. Харшаньи [15]) описывается следующим набором:

- множеством N агентов;
 - множеством K' возможных *типов* агентов, где тип i -го агента $k_i \in K_i$, $i \in N$, вектор типов $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in K' = \prod_{i \in N} K_i$;
- множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;

- набором функций полезности $u_i: K' \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$;
- представлениями $\mu_i(\cdot | k_i) \in \Delta(K_{-i})$, $i \in N$, агентов.

Равновесие Байеса – Нэша в игре с неполной информацией определяется как набор стратегий агентов вида $\sigma: K_i \rightarrow X_i, i \in N$, которые максимизируют соответствующие ожидаемые полезности

$$U_i(k_i, \sigma_i(\cdot), \sigma_{-i}(\cdot)) = \int_{k_{-i} \in \prod_{j \neq i} K_j} u_i(k, \sigma_i(k_i), \sigma_{-i}(k_{-i})) \mu_i(k_{-i} | k_i) dk_{-i}, i \in N.$$

В Байесовых играх, как правило, предполагается, что представления $\{\mu_i(\cdot | \cdot)\}_{i \in N}$ являются общим знанием. Для этого, в частности, достаточно, чтобы они были *согласованы*, то есть выводились каждым из агентов по формуле Байеса из распределения $\mu(k) \in \Delta(K')$, которое является общим знанием.

Пример 1. Пусть имеются n игроков ($N = \{1, \dots, n\}$) с целевыми функциями $f_i(\theta, x, u) = x_i(u\theta - \sum_{j \in N} x_j)$ и множествами допустимых действий $X_i = [0, +\infty), i \in N$. Параметр $\theta \in \mathbb{R}_1^+$ и управление $u \in \mathbb{R}_1^+$ характеризуют «общий ресурс» системы – способность приносить участникам системы полезность от выбираемых действий.

В соответствии с (1) для i -го игрока его наилучший ответ на обстановку определяется как $BR_i(\theta, x_{-i}, u) = (u\theta - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j) / 2$.

В рамках игры в нормальной форме, когда все игроки осведомлены обо всех параметрах и принимают решения одновременно и независимо, получаем, что равновесие Нэша имеет вид:

$$x_i^*(\theta, u) = \frac{u\theta}{n+1}. \text{ При этом значение целевой функции игрока}$$

$$f_i(\theta, x^*, u) = (u\theta)^2 (n+1)^{-2}.$$

Пусть целевая функция Центра $F(x, u) = \alpha \sum_{i \in N} x_i - \beta u^2$, где

α и β – положительные коэффициенты. Подставляя зависимость равновесия Нэша от управления, получим следующую задачу

управления (параметрического): $\frac{\alpha u n \theta}{(n+1)} - \beta u^2 \rightarrow \max_{u \geq 0}$. Ее реше-

$$\text{ние: } u^* = \frac{\alpha n \theta}{2\beta(n+1)}.$$

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

При $n > 1$ равновесие Нэша не эффективно по Парето: например, если каждый игрок выберет действие $x_i = 0,5u\theta n^{-1}$, то значение целевой функции каждого из игроков будет $0,25u^2\theta^2 n^{-1}$. Более того, нетрудно убедиться, что любая игровая ситуация $\tilde{x} : |\tilde{x}_i| = 0,5u\theta$ является оптимальной по Парето, а сумма значений целевых функций игроков при этом составляет $0,25u^2\theta^2$ и не зависит от числа игроков, в то время как в единственной равновесной по Нэшу ситуации, которая была найдена выше, эта сумма равна $u^2\theta^2 n(n+1)^{-2}$ и убывает с ростом игроков.

Однако в любой точке Парето для любого игрока будет индивидуально рационально поменять свое действие, увеличив его по сравнению с тем, что он выбирал, так как значение целевой функции игрока может быть записано как $f_i(x_i, \tilde{x}_{-i}) = x_i(0,5u\theta + \tilde{x}_{-i} - x_i)$, а функция наилучшего ответа принимает вид $BR_i(\theta, \tilde{x}_{-i}, u) = 0,25u\theta + \tilde{x}_{-i}$. То есть точка Парето не устойчива по Нэшу.

Зададимся вопросом: можно ли модифицировать рассматриваемую игру так, чтобы эффективная по Парето ситуация оказалась равновесной по Нэшу?

Предположим, что можно управлять составом игроков в данной модели. Если в системе останется один игрок, $n = 1$, то, очевидно, ему будет выгодно выбрать действие $0,5u\theta$. То есть, управляя составом игроков, можно решать задачу управления.

Несложно увидеть, что, если изменить множество допустимых действий каждого игрока — $x_i \in [0, 0,5u\theta n^{-1}]$, то это также приведет к решению поставленной задачи, так как в этом случае для любого игрока стратегия $\tilde{x}_i = 0,5u\theta n^{-1}$ будет доминантной, так как для $\forall x_i < 0,5u\theta n^{-1}$

$$0,5u\theta n^{-1}(\theta(1-0,5n^{-1}) - |x_{-i}|) > x_i(\theta - |x_{-i}| - x_i)$$

при $|x_{-i}| \leq 0,5u\theta(n-1)n^{-1}$. То есть, осуществляя институциональное управление (изменяя множество допустимых действий), поставленную задачу также можно решить.

Иллюстрацией *мотивационного управления* может служить следующая модификация игры. Целевые функции игроков меняются следующим образом:

$$\tilde{f}_i(x) = f_i(x) - f_i(x) + \frac{1}{n} \sum_{j \in N} f_j(x),$$

то есть у каждого из игроков изымается весь полученный им выигрыш, а затем весь суммарный выигрыш делится поровну между всеми игроками. Такого рода игры называются *играми с побочными платежами* [3, 8]. В данном случае платежи между игроками *сбалансированны*, то есть сумма (по всем игрокам) платежей равна нулю.

Таким образом, $\tilde{f}_i(x) = \frac{1}{n}(u\theta - \sum_{j \in N} x_j) \sum_{j \in N} x_j$. В этом случае

$$BR_i(\theta, x_{-i}) = 0,5(u\theta - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j) / n.$$

В рамках игры в нормальной форме, когда все игроки осведомлены обо всех параметрах и принимают решения одновременно и независимо, получаем бесконечное число равновесий Нэша:

$$E_N(\theta) = \{x \in X' \mid \sum_{j \in N} x_j = u\theta / 2\}.$$

То есть любая оптимальная по Парето ситуация в модифицированной игре будет равновесной по Нэшу. Значит, мотивационное управление позволяет решить поставленную задачу. Следует отметить, что реализация предложенного управления требует создания нового элемента системы, который будет «собирать» получаемые агентами выигрыши, а потом перераспределять их равномерно между игроками. Такую функцию может брать на себя Центр. •

Управление структурой (см. пример 1) подразумевает переход от игры в нормальной форме к более сложному классу игр – иерархическим играм, которые рассматриваются в следующем подразделе. Для решения задач информационного управления был развит аппарат теории рефлексивных игр, который кратко описан в подразделе 6.

3. Иерархические игры

Если в рассматриваемых в подразделе 2 моделях игровой неопределенности предполагалось, что игроки (агенты) выбирают свои стратегии одновременно и однократно, то в *иерархических играх* (пионерская монография Ю.Б. Гермейера [3]) существует фиксированный порядок ходов: первый ход делает Центр, затем свои стратегии выбирают агенты. Иерархические игры являются адекватным аппаратом описания задач управления организационными системами [1, 2, 8] и задач теории контрактов [14, 20].

Для иерархических игр характерно использование *максимального гарантированного результата* (МГР) в качестве базовой концепции решения игры. При этом «пессимистичность» МГР (взятие минимума по множеству неопределенных параметров) компенсируется возможностью передачи информации между игроками, что, очевидно, снижает неопределенность при принятии решения.

Критерии эффективности (целевые функции) первого и второго игроков обозначим $w_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ соответственно. Выигрыши игроков зависят от их действий x_1 и x_2 из множеств действий X_1^0, X_2^0 .

Во всех моделях иерархических игр считается, что *первый игрок (Центр)* имеет право первого хода. Его ход состоит в выборе управления – *стратегии* \tilde{x}_1 . Понятие стратегии существенно отличается от понятия действия и тесно связано с информированностью первого игрока о поведении *второго игрока – агента*. Под стратегией игрока здесь и далее понимается правило его поведения, то есть правило выбора конкретного действия в зависимости от содержания и конкретного значения той информации, которую он получит в процессе игры. Выбирать же собственно действие Центр может и после выбора действия агентом.

Самая простая стратегия Центра состоит в выборе непосредственно действия x_1 (если поступления дополнительной информации о действии агента в процессе игры не ожидается), более сложная – в выборе функции $\tilde{x}_1(x_2)$ (если в процессе игры ожидается информация о действии агента). Стратегия Центра

может также состоять в сообщении агенту некоторой информации, например, о планах своего поведения в зависимости от выбора агентом действия. При этом агент должен быть уверен, что Центр может реализовать эту стратегию, то есть что последний будет точно знать реализацию действия x_2 на момент выбора своего действия x_1 .

Например, если агент (выбирающий стратегию вторым) не ожидает информации о *действии* Центра, то реализация права первого хода Центра может состоять в сообщении Центром агенту функции $\tilde{x}_1(x_2)$. Такое сообщение может рассматриваться как обещание выбрать действие $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при выборе агентом действия x_2 . Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения Центра, $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(\cdot))$. Если при этом агент доверяет сообщению Центра, то он должен выбрать действие x_2^* , реализующее $\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2)$.

Игра с описанным выше порядком функционирования называется для краткости *игрой* Γ_2 (примером такой игры служит задача стимулирования в условиях информированности Центра о действии агента) [8, 14].

Если Центр не ожидает информации о действии агента и это известно агенту, то стратегия Центра состоит, как уже было сказано, просто из выбора некоторого действия x_1^* . Стратегия агента состоит в выборе $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (он делает ход вторым, уже зная действие Центра). Такая игра называется *игрой* Γ_1 (это, например, та же задача стимулирования, но уже в условиях отсутствия у Центра информации о действии агента) [3]. Рассмотрим сначала игру Γ_1 .

Пара действий (x_1^*, x_2^*) в игре Γ_1 называется *равновесием Штакельберга*, если

$$(3) \quad x_1^* \in \text{Arg} \max_{x_1 \in X_1^0, x_2 \in BR_2(x_1)} f_1(x_1, x_2),$$

$$(4) \quad x_2^* \in BR_2(x_1^*) = \text{Arg} \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2),$$

то есть $BR_2(\cdot)$ – функция наилучшего ответа агента на действие Центра.

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

Равновесие в игре Γ_1 [3] отличается от равновесия Штакельберга (3) тем, что при определении оптимальной стратегии первого игрока вычисляется минимум по множеству $R_2(x_1)$:

$$x_1^* \in \text{Arg max}_{x_1 \in X_1^0} \min_{x_2 \in BR_2(x_1)} f_1(x_1, x_2).$$

В игре Γ_1 агент выбирает действие в условиях полной информированности, уже зная действие Центра. Максимизация выигрыша выбором своего действия является здесь частным случаем применения принципа МГР. Равновесное по Штакельбергу действие Центра также дает ему гарантированный результат, если Центр уверен в том, что агент выбирает свое действие в соответствии с (4) и *принципом благожелательности* [2, 8]. Таким образом, равновесные стратегии как Центра, так и агента, являются для них и гарантирующими.

Однако ситуация, когда первый ход дает преимущество, все же более типична. Тогда, если порядок ходов определяется самими игроками, между ними возникает *борьба за лидерство*. Игре Γ_0 двух лиц в нормальной форме можно поставить в соответствие две игры Γ_1 (игры первого порядка), отличающиеся последовательностью ходов. Тогда борьба за лидерство (первый ход) определяется выгодностью перехода от исходной игры к какой-либо из иерархических игр первого порядка. Известно [6], что если в игре двух лиц имеются хотя бы два различных эффективных по Парето равновесия Нэша, то в этой игре имеет место борьба за первый ход.

Тем не менее во многих случаях соответствующее игре Γ_1 поведение Центра нельзя назвать эффективным (см. [8]: если в задаче стимулирования Центр будет первым выбирать действие (стимулирование агента, уровень зарплаты), а затем уже агент будет выбирать свое действие при заданном стимулировании, единственное равновесие Штакельберга будет состоять в том, что Центр ничего не будет платить агенту, а агент, соответственно, не будет работать). Поэтому когда Центр наблюдает действие агента, он заинтересован сообщить агенту о своих планах по выбору действия в зависимости от действия агента, реализуя тем самым игру Γ_2 .

Приведем формулировку теоремы о максимальном гарантированном результате Центра в игре типа Γ_2 . К этой игре сво-

дятся многие модели управления организационными системами [1, 8, 10]. Определим необходимые для формулировки этой теоремы понятия.

Пусть целевые функции игроков: $w_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ непрерывны на компактных множествах $x_1 \in X_1^0$, $x_2 \in X_2^0$ допустимых действий.

Стратегия Центра – $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_2)$, то есть предполагается следующий порядок функционирования: игрок 1 (Центр), обладая правом первого хода, сообщает игроку 2 (агенту) план выбора своей стратегии в зависимости от выбранной игроком 2 стратегией x_2 . После этого второй игрок выбирает действие x_2 , максимизируя свою целевую функцию с подставленной туда стратегией первого игрока, а затем первый игрок выбирает действие $\tilde{x}_1(x_2)$.

Стратегия наказания $x_1^H = x_1^H(x_2)$ определяется из условия:

$$f_2(x_1^H(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Если стратегий наказания несколько, то будем называть *оптимальной стратегией наказания* ту из них, на которой достигается максимум выигрыша первого игрока.

Гарантированный результат второго игрока (при использовании первым игроком стратегии наказания) равен

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^H(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Множество действий второго игрока, обеспечивающих ему максимальный выигрыш при использовании первым игроком стратегии наказания, есть $E_2 = \{x_2 / f_2(x_1^H(x_2), x_2) = L_2\}$.

Множество достижимости $D = \{(x_1, x_2): f_2(x_1, x_2) > L_2\}$ – это договорное множество рассматриваемой игры, то есть множество сочетаний стратегий первого и второго игроков, которые гарантировали бы второму результат, строго больший того, что тот может получить даже при наихудших для него действиях первого игрока (то есть при использовании первым игроком стратегии наказания).

Наилучший результат первого игрока на множестве достижимости есть

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

$$K = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in D} f_1(x_1, x_2), & D \neq \emptyset; \\ -\infty & , D = \emptyset. \end{cases}$$

Принадлежность ситуации множеству достижимости гарантирует реализуемость этого результата путем использования стратегии наказания.

Определим действие первого игрока, реализующее $K - \varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, при выборе вторым игроком рекомендуемого действия из D :

$$f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \geq K - \varepsilon, \quad (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in D \neq \emptyset.$$

Вычислим $M = \inf_{x_2 \in E_2} \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2)$ – гарантированный резуль-

тат Центра при применении им стратегии наказания (так как стратегии второго игрока ограничены множеством E_2).

Определим стратегию $x_1^{ae}(x_2)$, которая реализует (с точностью ε) наилучший ответ Центра на действие x_2 агента (ε -доминантная стратегия), то есть

$$f_1(x_1^{ae}(x_2), x_2) \geq \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2) - \varepsilon.$$

Теорема 1 (Гермейера). [3]. *В игре Γ_2 наибольший гарантированный результат Центра равен $\max [K, M]$. При $K > M$ ε -оптимальная стратегия Центра*

$$\tilde{x}_1^\varepsilon(x_2) = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & x_2 = x_2^\varepsilon, \\ x_1^H(x_2), & x_2 \neq x_2^\varepsilon. \end{cases}$$

При $K \leq M$ оптимальная стратегия Центра заключается в применении оптимальной стратегии наказания.

Каким же образом соотносятся выигрыши Центра в играх Γ_1 и Γ_2 с одинаковыми функциями выигрыша? Существуют ли более рациональные для Центра методы обмена информацией, дающие ему больший выигрыш? Ответ на эти вопросы дает рассмотрение *информационных расширений* игры, или *метаигр*.

Если Центр не планирует самостоятельно получить информацию о действии агента, он может первым выбрать действие, реализуя игру Γ_1 . Однако ему можно порекомендовать и более сложное поведение. Центр может попросить агента сообщить

ему свою стратегию $x_2 = \tilde{x}_2(x_1)$, которая основана на ожидаемой агентом информации о действии Центра. Реализация права первого хода Центром состоит в этом случае в сообщении агенту стратегии $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$. Эту стратегию можно интерпретировать, как обещание Центра выбрать действие $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$ при условии, что агент обещает выбирать свое действие в соответствии с $\tilde{x}_2(x_1)$. Так формируется игра Γ_3 .

Если Центр осуществляет *управление структурой*, что фактически сводится к *управлению последовательностью ходов*, то есть определяет порядок обмена информацией, он может выбирать, играть ему Γ_1 или Γ_3 . В обеих играх Центр вынужден выбирать действие, не зная действия, выбранного агентом. Можно считать игру Γ_3 в некотором роде усложнением игры Γ_1 .

Аналогично тому, как с помощью образования дополнительной «петли обратной связи» из Γ_1 была образована Γ_3 , можно усложнить и игру Γ_2 . Так образуется игра Γ_4 . В ней агент, ожидая от Центра, как и в Γ_2 , информацию вида $\tilde{x}_1(x_2)$, формирует и сообщает Центру свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1)$. Центр, обладающий правом первого хода, пользуется стратегиями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}_1(\tilde{\tilde{x}}_2)$, которые определяют, какую функцию $\tilde{\tilde{x}}_1(x_2)$ выберет Центр в зависимости от сообщения агента $\tilde{\tilde{x}}_2$.

Таким же способом можно на основе Γ_3 построить игру Γ_5 и т.д. В каждой из построенных четных игр Γ_{2m} , $m = 1, 2, \dots$, Центр использует в качестве стратегий отображения множества стратегий агента в этой игре на множество стратегий Центра в игре Γ_{2m-2} . Аналогично стратегиями агента являются отображения множества стратегий Центра в Γ_{2m} на множество стратегий агента в игре Γ_{2m-2} .

Такую рефлексию можно было бы наращивать бесконечно, переходя к все более сложным схемам обмена информацией, если бы рассмотрение этих игр увеличивало выигрыш Центра (в интересах которого и проводится исследование всех метаигр). Однако имеет место следующий результат.

Теорема 2. [3]. *Максимальный гарантированный результат Центра в игре Γ_{2m} при $m > 1$ равен максимальному гарантированному результату Центра в игре Γ_2 . В играх же Γ_{2m+1} при $m > 1$ максимальный гарантированный результат Центра равен его максимальному гарантированному результату в игре Γ_3 .*

Таким образом, при исследовании гарантированного результата (выигрыша) Центра можно ограничиться только играми Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 . Кроме того, известно [3], что максимальный гарантированный результат Центра в игре Γ_2 не меньше его гарантированного результата в игре Γ_3 , а тот, в свою очередь, не меньше гарантированного выигрыша в игре Γ_1 . Этот факт показывает, что Γ_2 является «идеальной» игрой для Центра. Соответственно, если Центр имеет возможность определять порядок и содержание обмена информацией и, кроме того, при выборе своего действия знает действие, выбранное агентом, он должен играть Γ_2 . Если Центр на момент выбора своего действия не знает действия агента, ему наиболее выгодна игра Γ_3 .

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 в рамках управления структурой имеется возможность преобразовать игру в нормальной форме в игру Γ_2 (основываясь на описанных выше результатах теории иерархических игр), наделив игрока (без потери общности) с индексом 1 правом выбора первого условного хода; остальные игроки, как и прежде, разыгрывают между собой игру в нормальной форме. Положим $u = 1$. Пусть первый игрок предлагает следующую условную стратегию:

$$x_1(x_{-1}) = \begin{cases} 0,5(u\theta - |x_{-1}|_1), & \forall j \in N \setminus \{1\} : x_j = \varepsilon, \\ u\theta - |x_{-1}|_1, & \exists j \in N \setminus \{1\} : x_j \neq \varepsilon, \end{cases}$$

где ε – сколь угодно малая положительная величина. Первая строка в этой записи описывает режим «сотрудничества», в котором все остальные игроки выбирают свои действия равными ε , как от них ожидает игрок 1. В этом случае значение целевой функции первого игрока равно $0,25(u\theta - (n-1)\varepsilon)^2$, всех остальных игроков – по $0,5(u\theta - (n-1)\varepsilon)$. Вторая строка – режим наказания, который выбирается, если хотя бы один из игроков за исключением первого выбрал действие, отличное

от ε . Тогда целевые функции всех игроков равны нулю. В этом случае в игре в нормальной форме, разыгрываемой игроками с индексами $2, \dots, n$, их целевые функции приобретают вид

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} 0,5\varepsilon(u\theta - (n-1)\varepsilon), & x_i = \varepsilon \wedge \forall j \in N \setminus \{1, i\} : x_j = \varepsilon, \\ 0 & \{x_i = \varepsilon \wedge \exists j \in N \setminus \{1, i\} : x_j \neq \varepsilon\} \vee x_i \neq \varepsilon; \end{cases}$$

откуда следует, что $\forall i \in N \setminus \{1\} \quad \forall x_i \in [0, +\infty) \quad \forall x_{-\{1, i\}} \in [0, +\infty)^{n-2}$
 $\tilde{f}_i(\varepsilon, x_{-\{1, i\}}) \geq \tilde{f}_i(x_i, x_{-\{1, i\}})$. То есть действие ε является доминантной стратегией для любого из игроков с индексами $2, \dots, n$.

Получаем, что действия всех игроков, удовлетворяющие критерию эффективности по Парето с точностью $0,5(n-1)\varepsilon$, устойчивы в том смысле, что игрок 1 реализует свою оптимальную стратегию в иерархической игре, а действия остальных игроков составляют равновесие в доминантных стратегиях в игре в нормальной форме «на нижнем уровне» иерархической игры. То есть, *управляя структурой*, можно решать различные задачи управления. •

В заключение настоящего подраздела подчеркнем, что существуют модели, развивающие описанную выше модель Ю.Б. Гермейера на случай динамических систем и систем с обменом информацией между игроками [4, 5], на случай многоуровневых систем [10], а также на самые разные прикладные области – экономические, организационные, экологические и др. системы [5, 8, 10].

4. Теория игр и механизмы управления

Математический инструментарий теории игр позволяет исследовать следующий вопрос: согласована ли конкретная процедура принятия управленческих решений – *механизм управления* (Mechanism) в *организационной* или *социально-экономической системе* с интересами тех ее участников, которых она затрагивает.

Например, если необходимо осуществить выбор из нескольких вариантов на основе предпочтений агентов, заданных над множеством допустимых вариантов, то будет ли правило, которое на основании сообщаемых агентами предпочтений определяет

итоговый выбор, мотивировать агентов раскрывать *достоверно* свои предпочтения, или же у агентов будет мотивация за счет сообщения недостоверных предпочтений (*манипулирования информацией*) будет возможность получить более предпочтительный для себя результат выбора. Исследование этого вопроса в рамках *теории коллективного выбора* (см., например, [17]) привело к очень известным «негативным» теоремам о невозможности – *парадокс Эрроу* и *теореме о диктаторстве* Гиббарда – Сатурэйта, из которых следует, что, если необходимо упорядочить более двух альтернатив на основании предпочтений двух и более агентов, то единственный класс правил, которые гарантируют, что результат упорядочения будет оптимален по Парето, – это «диктаторское» правило, в рамках которого результатом упорядочения должно быть предпочтение одного, заранее выбранного агента – *диктатора*.

Сформулируем вопрос шире: каким условиям должен удовлетворять механизм управления, чтобы учитывать возможность стратегического поведения субъектов управляемой системы, и как с учётом таких условий следует решать задачу управления? Данный вопрос лег в основу таких научных направлений как *теория управления активными (организационными) системами* [1, 2, 8] и *теории контрактов* (Contract Theory) [14, 20] и вобравшей ее в себя *теории синтеза механизмов* (Mechanism Design) см., например, в [17]. Эти условия получили названия *условий согласования*, или *условий совместимости со стимулами* (Incentive Compatibility). Проиллюстрируем суть этих условий следующим примером.

Пример 3 (механизм стимулирования). Рассмотрим систему, состоящую из двух агентов, в которой лишь второй агент выбирает стратегию (например, какой объем работы выполнить, неся при этом квадратичные затраты), однако полезность/выигрыш w обоих агентов зависит от выбранной стратегии:

$$w_1(x) = x_2, \quad w_2(x) = -0,5x_2^2, \quad x_2 \in [0, +\infty).$$

Очевидно, что доминантная стратегия второго агента $x_2^* = 0$, хотя первый агент предпочел бы, чтобы второй агент выбирал бы как можно большее значение своей стратегии. То есть равновесные полезности обоих агентов равны нулю.

Введем в систему возможность *побочных платежей* – трансфера полезности (размер платежа определяет первый агент) от первого агента второму, модифицируя тем самым целевые функции агентов: $w_1(x) = x_2 - x_1$, $w_2(x) = x_1 - 0,5x_2^2$, $x_1 \in [0, +\infty)$. То есть у первого агента появляется возможность «заплатить» второму. Что позволяет рассуждать в терминах суммарной полезности системы $w_1(x) + w_2(x) = x_2 - 0,5x_2^2$, максимум которой достигается при $\hat{x}_2 = 1$ и равен 0,5.

Теоретико-игровой анализ измененной модели как игры в нормальной форме (см. выше) показывает, что, как и в первоначальной модели, доминантной стратегией второго агента остается $x_2^* = 0$, а доминантная стратегия первого игрока аналогична – $x_1^* = 0$. То есть в системе существует равновесие в доминантных стратегиях, интерпретируемое следующим образом: независимо от того, сколько заплатит первый агент, второму лучше не работать; и независимо от того, как поработает второй агент, первому лучше ничего не платить. Равновесные полезности обоих агентов так и останутся равными нулю.

Если предоставить одному из агентов право выбрать свою стратегию первым, преобразовав игру в Γ_1 , то это ситуацию не улучшит, так как найденные выше стратегии были доминантными.

Рассмотрим, что позволяет сделать переход к игре Γ_2 . Для второго агента любая игровая ситуация x , в которой $w_2(x) > 0$, является более предпочтительной. То есть первый агент, применяя стратегию

$$\tilde{x}_1(x_2, z) = \begin{cases} 0,5z^2 + \varepsilon, & x_2 = z, \\ 0, & x_2 \neq z, \end{cases}$$

где ε – сколь угодно малая строго положительная константа, может побудить/мотивировать второго агента выбрать любую стратегию $z \in [0, +\infty)$, причем это будет *согласовано* с интересами второго агента. Эта стратегия первого агента может трактоваться как *механизм стимулирования*, в рамках которого агент 1 компенсирует агенту 2 затраты на выбор им стратегии z . После чего задача выбора первым агентом *плана* z будет являться задачей *согласованного планирования*:

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

$$z - 0,5z^2 - \varepsilon \rightarrow \max_{z \in [0, +\infty)}$$

Очевидно, что ее решение (*оптимальный план*) совпадает с $\hat{x}_2 = 1$. Иными словами, механизм управления, в рамках которого первый агент назначает второму план $z = 1$ и применяет описанный выше механизм стимулирования, совместим со стимулами выбора $x_2 = z$ со стороны второго агента.

Для решения задачи оптимального планирования может оказаться необходимым получение частной информации от агентов. Пусть в рамках рассматриваемой модели $w_2(x, r) = x_1 - 0,5x_2^2r^{-1}$, причем точное значение параметра r известно лишь агенту 2, а агент 1 знает, что этот параметр с равной вероятностью может принимать значения 1 или 2: $r \in \{1, 2\}$. Очевидно, что решение задачи оптимального планирования теперь зависит от этого параметра, так как $\hat{x}_2 = r$ и максимальная полезность системы равна $r/2$. Математическое ожидание максимальной суммарной полезности агентов в рамках введенных предположений равно $3/4$.

Если агент 1 в рамках разработанного выше механизма управления предположит, что $r = 1$, то при любом из двух возможных значений параметров предлагаемый план $z = 1$ и механизм стимулирования будут согласованы с интересами агента 2, и агент 1 при любом значении параметра r получит полезность $0,5 - \varepsilon$. Если же агент 1 будет ориентироваться на значение параметра $r = 2$:

$$\tilde{x}_1(x_2, z) = \begin{cases} 0,25z^2 + \varepsilon, & x_2 = z, \\ 0, & x_2 \neq z, \end{cases}$$

то при истинном значении параметра $r = 1$ механизм окажется *несогласованным* с интересами агента 2, так как $w_2(x_2 = 2, \tilde{x}_1(x_2, 2)) = 0,5(1 - 0,5 \times 4) < 0$. То есть агент 2 при значении параметра $r = 1$ откажется выполнять план, который был рассчитан для параметра $r = 2$. Значит, с учетом равных вероятностей значений параметра r , агент 1 также получит полезность $0,5 - \varepsilon$.

Покажем, как, используя возможность получения информации от агента 2 о значении параметра r и с учетом требований

совместимости со стимулами, можно повысить эффективность функционирования системы.

Рассмотрим игру Γ_4 , в которой агент 1 объявляет правило планирования $\pi(r) = \{\hat{z}(r), \hat{x}_1(x_2, \hat{z}(r), r)\}$, то есть каким образом назначаемый агенту 2 план и выбираемая система стимулирования будут зависеть от того, какое значение параметра r сообщит агент 2 агенту 1. После того как агент 2 объявляет значение своего параметра, а агент 1 на основе этой информации, подставляя сообщение в правило планирования, определяет план и систему стимулирования, разыгрывается описанная выше игра Γ_2 .

Рассмотрим механизм планирования, который комбинирует решения задачи согласованного планирования для возможных значений параметров r , то есть $\hat{z}(r) = r$,

$$\hat{x}_1(x_2, \hat{z}(r), r) = \begin{cases} 0,5\hat{z}(r)^2 r^{-1} + \varepsilon, & x_2 = \hat{z}(r), \\ 0, & x_2 \neq \hat{z}(r). \end{cases}$$

Тогда, если реальное значение параметра $r = 2$, то агенту 2 окажется невыгодным его сообщать честно, так как при сообщении $\tilde{r} = 1$ он получит большее значение целевой функции:

$$w_2 = 0,5\hat{z}(\tilde{r})^2 \tilde{r}^{-1} + \varepsilon - 0,5\hat{z}(r)^2 r^{-1} > \varepsilon.$$

Но при любом истинном значении параметра агенту 2 будет выгодно выполнять план $\hat{z}(1) = 1$. Что приведет к тому, что полезность агента опять же составит $0,5 - \varepsilon$. То есть хоть предложенный механизм будет совместим со стимулами выполнять предлагаемый план, но он не будет совместим со стимулами достоверно раскрывать ту информацию, которой обладает агент 2. Механизм будет *манипулируемым*.

Покажем, что, решая проблему манипулируемости, можно повысить эффективность. Обозначим через $\check{w}_2(\pi(s), r)$ полезность агента 2 в предположении, что в механизме планирования он сообщает некоторое значение s при истинном значении своего параметра r . Учтем при синтезе механизма планирования требования того, что план, назначаемый агенту 2, должен быть наилучшим для него в предположении о достоверности сооб-

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

щённого им значения параметра: $\tilde{w}_2(\pi(2), 2) \geq \tilde{w}_2(\pi(1), 2)$ и $\tilde{w}_2(\pi(1), 1) \geq \tilde{w}_2(\pi(2), 1)$.

Выполнение таких условий при синтезе механизмов планирования при решении любой задачи управления получило название *условий совершенного согласования*. А механизмы планирования, удовлетворяющие этим условиям, называются механизмами *открытого управления* [1, 2, 8] или удовлетворяющими *принципу откровенности (Revelation Principle)* [17].

В рассматриваемом примере для выполнения этих условий будет достаточно записать механизм стимулирования следующим образом:

$$\hat{x}_1(x_2, \hat{z}(r), r) = \begin{cases} 0,5\hat{z}(r)^2 r^{-1} + \Delta(r) + \varepsilon, & x_2 = \hat{z}(r), \\ 0, & x_2 \neq \hat{z}(r), \end{cases}$$

где $\Delta(1) = 0$ (так как в примере агенту выгодно было занижать сообщаемое значение параметра) а $\Delta(2)$ находится из условия $\tilde{w}_2(\pi(2), 2) \geq \tilde{w}_2(\pi(1), 2)$: $\Delta(2) = 0,25\hat{z}(1)^2$. Значения планов $\hat{z}(1)$ и $\hat{z}(2)$ определим из решения задачи оптимального согласованного планирования для агента 1:

$$0,5(z(1) - 0,5z(1)^2 - \varepsilon) + 0,5(z(2) - 0,25z(2)^2 - 0,25z(1)^2 - \varepsilon) \rightarrow \max_{(z(1), z(2)) \in [0, +\infty)^2}.$$

Для рассматриваемого примера получим, что $\hat{z}(2) = 2$, $\hat{z}(1) = 2/3$. То есть при сообщении агентом 2 значения параметра $r = 2$ он получает план как прежде, но помимо компенсации затрат еще получает надбавку $\Delta(2) = 1/9$ при выполнении этого плана. Именно эта надбавка мотивирует агента 2 сообщать достоверное значение параметра при его истинном значении $r = 2$. А при сообщении значения параметра $r = 1$ – получает меньший план и ему, как и прежде, только компенсируются затраты при условии выполнения им плана. Легко проверить, что при истинном значении параметра $r = 1$ агенту 2 будет невыгодно сообщать его значение недостоверно.

Ожидаемая полезность агента 1 при применении синтезированного механизма составит $5/9 - \varepsilon$. Что менее $3/4$, но больше $0,5$.

В заключение примера проиллюстрируем приведенную выше теорему 2. Описанную игру Γ_4 можно свести к игре Γ_2 , в которой агент 1 не просит агента сообщать ему какую-либо информацию, а сразу предлагает следующий механизм стимулирования (*контракт* в соответствии с [14, 20]):

$$\tilde{x}_1(x_2, z) = \begin{cases} 0,25\hat{z}(2)^2 + \Delta(2) + \varepsilon, & x_2 = \hat{z}(2), \\ 0,5\hat{z}(1)^2 + \varepsilon, & x_2 = \hat{z}(1), \\ 0, & x_2 \notin \{\hat{z}(1), \hat{z}(2)\}. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что данный контракт совместим со стимулами агента 2 выбрать $x_2 = \hat{z}(1)$ при $r = 1$ и $x_2 = \hat{z}(2)$ – при $r = 2$. •

В теории активных систем синтезированный механизм управления (стратегия агента 1) называется *правильным*: в нем агенту 2 выгодно сообщать достоверную информацию на этапе планирования (*неманипулируемый механизм*) и выгодно выполнять назначенный план (*согласованный механизм*). А для задач управления с одним управляющим субъектом – *Центром* – и одним управляемым агентом (агенты 1 и 2 в примере соответственно) доказано [2], что оптимальное решение достаточно искать на классе правильных механизмов. В общем случае это не так, однако для целого ряда задач управления организационными системами доказано, что решение достаточно искать в классе механизмов, удовлетворяющих *принципу открытого управления* (или Revelation Principle) [1, 2, 8, 17].

5. Игры и оргструктуры

Выше рассмотрены основные понятия теории игр, причем был осуществлен переход от игр, в которых агенты выбирают свои действия одновременно (игра Γ_0 в нормальной форме или в форме характеристической функции) к иерархическим играм, в которых последовательность ходов фиксирована – первым делает ход Центр, а затем – агент. Можно усложнять модель и дальше, переходя к все более сложным играм. Опишем общую картину (рис. 5.3.1), которая позволяет увидеть логику перехода

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

от более простых к более сложным задачам, чтобы более сложная задача могла быть декомпозирована на более простые.

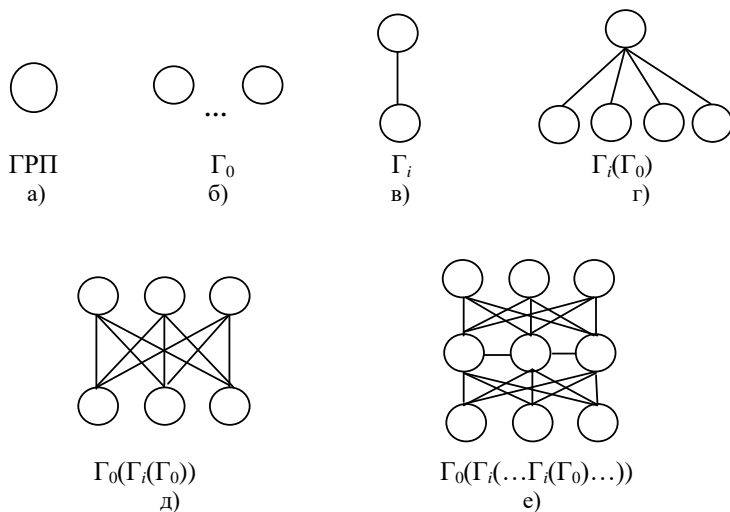


Рис. 5.3.1. Игры и структуры ($i = 1, 2, 3$)

Если имеется один субъект, принимающий решения (рис. 5.3.1а), то он описывается с точки зрения гипотезы рационального поведения (ГРП – см. введение к настоящей главе) как стремящийся максимизировать свою целевую функцию. Далее можно усложнить модель и рассмотреть несколько субъектов на одном уровне (рис. 5.3.1б), описав их взаимодействие игрой Γ_0 в нормальной форме (см. подраздел 2). Если ввести иерархию, то для двух субъектов (рис. 5.3.1в) их взаимодействие описывается игрой Γ_i , где $i = 1, 2$ или 3 (см. подраздел 3).

Представим себе, что имеется структура «один начальник – несколько подчиненных» (рис. 5.3.1г). Взаимодействие агентов, находящихся на одном уровне, можно описывать игрой Γ_0 . Взаимодействие «начальник – подчиненный» описывается игрой Γ_i . Тогда условно такую структуру можно представить игрой Γ_i , определенной на игре Γ_0 , условно обозначив ее $\Gamma_i(\Gamma_0)$.

Далее пусть имеется несколько начальников (Центров) и несколько подчиненных – агентов (рис. 5.3.1д). На нижнем

уровне агенты играют игру Γ_0 . Над ними Центры играют иерархическую игру Γ_i , но центры в свою очередь разыгрывают на своем уровне игру Γ_0 . Итого, получили игру $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$.

Можно взять более сложную структуру с более сложным взаимодействием (например, рис. 5.3.1е). Это будет иерархическая игра между уровнями, и «обычная» игра в нормальной форме на каждом из уровней: $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0 \dots \Gamma_i(\Gamma_0) \dots))$.

Основная идея заключается в том, чтобы *декомпозировать* сложную организационную структуру (сложную игру) на набор более простых и воспользоваться результатами исследования последних. Оказывается, что между играми и структурами существует глубокая связь: момент принятия субъектом решений определяет его «место» в организационной иерархии (см. подробности в [8]).

6. Рефлексивные игры

Рефлексия (лат. reflexio – обращение назад) – термин, означающий отражение, а также исследование познавательного акта [9]. Для объяснения сути рефлексии рассмотрим сначала одного субъекта. У него есть представления о природной реальности, но он может и осознавать (отражать, рефлексировать) эти представления, а также осознавать осознание этих представлений и т.д. Так формируется рефлексивная реальность. Рефлексия субъекта относительно своих собственных представлений о реальности, принципах своей деятельности и т.д. называется *авторефлексией*, или рефлексией первого рода. Отметим, что в большинстве гуманитарных исследований речь идет, в первую очередь, об авторефлексии, под которой в философии понимается процесс размышления индивида о происходящем в его сознании. Нас будет интересовать *рефлексия второго рода*, которая имеет место относительно представлений о реальности, принципах принятия решений, авторефлексии и т.д. других субъектов.

На сегодняшний день сформировались несколько исследовательских традиций описания рефлексии в моделях принятия решений и теории игр:

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

– подход к моделированию рефлексии, предложенный В.А. Лефевром в середине 60-х годов XX века (см. [7, 16]);

– подход, предложенный в 70-е годы XX века Р. Ауманном (см. [12]) и основывающийся на использовании логического аппарата при описании информированности игроков и приведший к возникновению *эпистемической теории игр* [12, 13, 17, 19];

– подход, предложенный в начале XXI века и основывающийся на концепции *информационного равновесия* как обобщения равновесия Нэша на случай нетривиальной взаимной информированности игроков [9].

Ниже кратко рассматривается последний подход.

Рассмотрим игру, в которой участвуют агенты из множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Omega$, то *структура информированности* I_i (как синоним будем употреблять термины «*информационная структура*» и «*иерархия представлений*») i -го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i -го агента о параметре θ – обозначим его θ_i , $\theta_i \in \Omega$. Во-вторых, представления i -го агента о представлениях других агентов о параметре θ – обозначим их θ_{ij} , $\theta_{ij} \in \Omega$, $j \in N$. В третьих, представления i -го агента о представлениях j -го агента о представлениях k -го агента – обозначим их θ_{ijk} , $\theta_{ijk} \in \Omega$, $j, k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности I_i i -го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{i_1 \dots i_l} \in \Omega$.

Аналогично задается *структура информированности* I *игры* в целом – набором значений $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{i_1 \dots i_l} \in \Omega$. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть (а именно I_i). Таким образом, структура информированности – бесконечное n -дерево (то есть тип структуры постоянен и является n -деревом), вершинам которого

соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

Рефлексивной игрой Γ_I называется игра, описываемая следующим кортежем [9]:

$$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\},$$

где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ – его целевая функция (зависимость целевой функции от управляющего параметра u ниже будем опускать), $i \in N$, Ω – множество возможных значений неопределенного параметра, I – структура информированности.

Подчеркнем, что все элементы рефлексивной игры кроме структуры информированности являются *общим знанием* среди агентов, то есть

- 1) эти элементы известны всем агентам;
- 2) всем агентам известно 1);
- 3) всем агентам известно 2)

и так далее до бесконечности.

Далее для формулировки некоторых определений и свойств понадобятся следующие обозначения:

Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N ;

Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если θ_i – представления i -го агента о неопределенном параметре, а θ_{ii} – представления i -го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, i -й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной: $\forall i \in N \forall \tau, \sigma \in \Sigma \theta_{ii\sigma} = \theta_{i\sigma}$.

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

Эта аксиома означает, в частности, что, зная θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности I_i , $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j -го агента в представлении i -го агента), I_{ijk} и т. д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с n реальными агентами (i -агентами, где $i \in N$) со структурами информированности I_i , в игре участвуют *фантомные агенты* (τ -агенты, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$, существующие в сознании реальных агентов.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности. Структуры информированности I_λ и I_μ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1) $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2) последние индексы в последовательностях λ и μ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I имеется счетное множество структур I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Говорят, что структура информированности I имеет *конечную сложность* $\nu = \nu(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{\tau_1}, I_{\tau_2}, \dots, I_{\tau_\nu}\}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \dots, \nu\}$, что для любой структуры I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_{τ_l} из этого набора. Если такого

конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $\nu(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющую конечную сложность, называют *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, такой что любая структура I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, называют *базисом* структуры информированности I .

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов γ , такую что, зная все структуры I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Структура информированности I , $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma(I)$, если

1) для любой структуры I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \leq \gamma$;

2) для любого целого положительного числа ξ , $\xi < \gamma$, существует структура I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину считают бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Понятия сложности и глубины структуры информированности игры можно рассматривать τ -субъективно. В частности, глубина структуры информированности игры с точки зрения τ -агента, $\tau \in \Sigma_+$, называется *рангом рефлексии τ -агента*.

Если задана структура I информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор τ -агентом

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_τ , поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, называют *информационным равновесием* [9], если выполнены следующие условия:

1) структура информированности I имеет конечную сложность ν ;

$$2) \forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*;$$

$$3) \forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma$$

$$(5) \quad x_{\sigma i}^* \in \text{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i, n}^*).$$

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

Удобным инструментом исследования информационного равновесия является *граф рефлексивной игры*, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам, и в каждую вершину-агента входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента.

Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер: если игра повторяется несколько раз и все игроки кроме i -го выбирают одни

и те же равновесные действия, то и i -му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется, то действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает.

Для формального изложения дополним кортеж, задающий рефлексивную игру, набором функций $v_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow V_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x) в элемент v_i некоторого множества V_i . Этот элемент v_i и есть то, что i -й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $v_i(\cdot)$ называют *функцией наблюдения* i -го агента [9]. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов.

Если $v_i(\theta, x) = (\theta, x)$, то есть $V_i = \Omega \times X'$, то i -й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i -й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ , $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что τ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из N). Зафиксируем

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

$i \in N$ и рассмотрим i -го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину $v_i(\theta, x_{i1}, \dots, x_{i, i-1}, x_i, x_{i, i+1}, \dots, x_{in})$.

На самом же деле он наблюдает величину

$$v_i(\theta, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Поэтому требование стабильности для i -агента означает совпадение этих величин.

В общем случае, то есть для \bar{i} -агента, $\bar{i} \in \Sigma_+$, условие стабильности определяют следующим образом. Информационное равновесие $x_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \Sigma_+$, называют *стабильным* при заданной структуре информированности I , если для любого $\bar{i} \in \Sigma_+$ выполняется

$$v_i(\theta_{\bar{i}}, x_{\bar{i}1}, \dots, x_{\bar{i}, i-1}, x_{\bar{i}}, x_{\bar{i}, i+1}, \dots, x_{\bar{i}n}) = \\ = v_i(\theta_{\bar{i}}, x_{\bar{i}1}, \dots, x_{\bar{i}, i-1}, x_{\bar{i}}, x_{\bar{i}, i+1}, \dots, x_{\bar{i}n}).$$

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. Пусть набор действий $x_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Его называют *истинным* равновесием, если набор (x_1, \dots, x_n) является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ . Из приведенного определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, называют *ложным*. Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

Формирование Центром у игроков структур информированности, приводящих к реализации требуемого Центру информационного равновесия, составляет суть информационного управления [9, 11]. Рассмотрим два примера.

Пример 4. Рассмотрим задачу *информационного управления* в рамках примера 1 при $u = 1$. Пусть у всех игроков центром сформирована структура информированности, в рамках которой они убеждены, что параметр модели $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{2n} \theta$, и что этот факт является общим знанием. То есть i -й игрок считает, что его

целевая функция равна $f_i(\tilde{\theta}, x) = x_i(\tilde{\theta} - \sum_{j \in N} x_j)$. Тогда, с учетом результатов примера 1, в информационном равновесии (субъективном равновесии Нэша) игроки будут выбирать стратегии $x_i(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}(n+1)^{-1}$, то есть $x_i = 0,5\theta n^{-1}$. Однако при этом будет наблюдаться следующая проблема. Значение целевой функции, на которое рассчитывал в равновесии каждый игрок, равно $f_i(x^*) = \tilde{\theta}^2(n+1)^{-2}$, то есть $f_i(x^*) = 0,25\theta^2 n^{-2}$. Однако реальный выигрыш, который получит каждый игрок, составит $0,25\theta^2 n^{-1}$, что в n раз больше ожидаемого. То есть результат подобного информационного управления может оказаться *нестабильным* в том смысле, что из-за отклонения значений тех параметров системы, которые наблюдаются игроками (например, значение собственной целевой функции). Вопрос, при каких условиях искажение реальной картины мира у игроков может приводить к «стабильным» игровым ситуациям также является предметом исследования теории рефлексивных игр [9]. •

Пример 5. Пусть имеются три агента с целевыми функциями следующего вида: $f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}$, где $x_i \geq 0, i \in N = \{1, 2, 3\}; \theta \in \Omega = \{1, 2\}$. Содержательно x_i – объем выпуска продукции i -м агентом, θ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж, а второе слагаемое – как затраты на производство.

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), «пессимистом», а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$), – «оптимистом».

Предположим, что объективно первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Граф рефлексивной игры изображен на рис. 5.3.2а.

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (5)):

5.3. Иерархические и рефлексивные игры

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{1}{2}, \\ x_2^* = \frac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

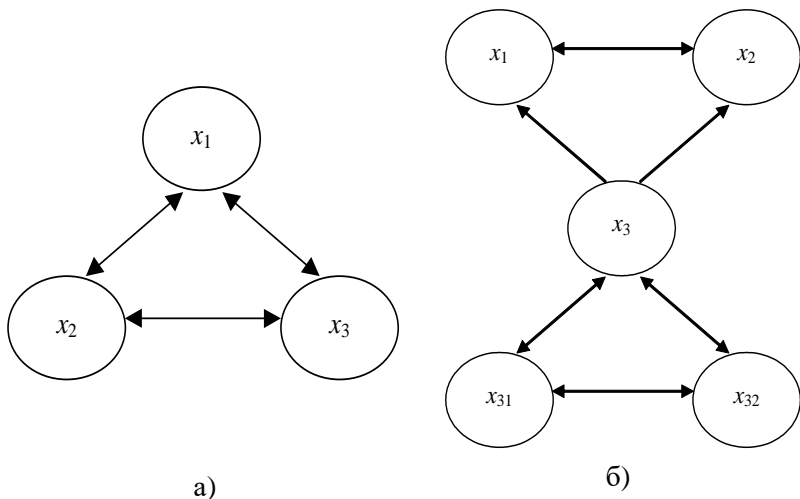


Рис. 5.3.2. Граф рефлексивной игры в примере 5

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 1/2$, $x_3^* = 0$.

Пусть теперь Центр в результате информационного управления сформировал структуру информированности в рамках которой: первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами; первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте. Граф соответствующей рефлексивной игры изображен на рис. 5.3.2б.

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (5)):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \frac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{9}{20}, \\ x_2^* = \frac{9}{20}, \\ x_3^* = \frac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \frac{1}{5}. \end{array} \right.$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 9/20$, $x_3^* = 1/5$.

За счет информационного управления сумма равновесных действий агентов выросла на 10%. Отметим, что рассмотренное управление не является стабильным, так как, пронаблюдав реальные выборы друг друга, агенты увидят отклонение от ожидаемых действий. •

Отметим, что в выше рассматриваются точечные структуры информированности, описывающие ситуацию точного (хотя, возможно, ошибочного) знания агентами значения неопределенного параметра, представления о нем оппонентов, представления о представлении и т.д. Более общими являются множественные структуры информированности (см., например, [9]), в которых представления агентов являются более сложными.

Теория рефлексивных игр позволяет ставить и решать задачи информационного управления в организационных, экономических, социальных и других системах, в военном деле и т.д. (в книгах [9, 11] рассмотрены более 30 примеров прикладных задач из перечисленных областей).

Литература

1. БУРКОВ В.Н. и др. *Механизмы управления*. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.
2. БУРКОВ В. Н., КОНДРАТЬЕВ В. В. *Механизмы функционирования организационных систем*. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
4. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
5. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
6. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
7. ЛЕФЕВР В.А. *Конфликтующие структуры*. – М.: Советское радио, 1973. – 158 с.
8. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – Физматлит, 2012. – 604 с.
9. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели*. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2013. – 412 с.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Управление устойчивым развитием активных систем*. – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2016. – 938 с.
11. ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Теоретико-игровые модели информационного управления*. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 227 с.
12. AUMANN R.J. *Agreeing to Disagree* // *The Annals of Statistics*. – 1976. – Vol. 4, No. 6. – P. 1236–1239.
13. BENTHEM J. *Logic in Games*. – Cambridge: The MIT Press, 2014. – 547 p.
14. BOLTON P., DEWATRIPONT M. *Contract Theory*. – Cambridge: MIT Press, 2005. – 740 p.

15. HARSANYI J. *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players* // Management Science. –Part I: 1967. – Vol. 14, No. 3. – P. 159–182. Part II: 1968. – Vol. 14, No. 5. – P. 320–334. Part III: 1968. – Vol. 14, No. 7. – P. 486–502.
16. LEFEVBRE V. *Lectures on the Reflexive Games Theory*. – N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010. – 220 p.
17. MASCHLER M., SOLAN E, ZAMIR S. *Game Theory*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013. – 1008 p.
18. NASH J.F. *Non-Cooperative Games* // Ann. Math. – 1951. – Vol. 54. – P. 286–295.
19. PEREA A. *Epistemic Game Theory*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 580 p.
20. SALANIE B. *The Economics of Contracts*. – Massachusetts: MIT Press, 2005. – 224 p.